PARIJS

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Pierre LESAINT

SUR LA RESOLUTION DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES DU PREMIER ORDRE PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS

Soutenue le 19 novembre 1975, devant la Commission d'Examen

MM. BAIOCCHI
DAUTRAY
GLOWINSKI
MOREL
RAVIART
TEMAM

T H E S E

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Pierre LESAINT

SUR LA RESOLUTION DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES DU PREMIER ORDRE PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS

Soutenue le 19 novembre 1975, devant la Commission d'Examen

MM. BAIOCCHI
DAUTRAY
GLOWINSKI
MOREL
RAVIART
TEMAM

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je suis profondément reconnaissant envers Monsieur LIONS pour avoir assuré ma formation dans le domaine des équations aux dérivées partielles et m'avoir donné le goût pour la recherche en analyse numérique.

Je tiens particulièrement à remercier Monsieur RAVIART qui m'a proposé une partie de ce travail et n'a cessé d'être pour moi une source d'idées et d'encouragements. J'ai aussi beaucoup apprécié les conseils et encouragements constants de Monsieur CIARLET.

Je remercie Messieurs BAIOCCHI, DAUTRAY, GLOWINSKI et TEMAN qui m'ont fait l'honneur de participer à mon Jury et Monsieur MOREL qui m'a proposé un second sujet très intéressant.

Ma reconnaissance va également à Monsieur GUILLOUD, Chef du Service de Mathématiques Appliquées et à Monsieur LASCAUX, Chef du Groupe Recherche Mathématique au Commissariat à l'Energie Atomique qui m'ont apporté toutes facilités pour effectuer ce travail, à Messieurs GERIN-ROZE et MORDANT avec lesquels j'ai pu avoir de fréquentes et fructueuses discussions, et à Madame CRUMIERE pour la réalisation matérielle de cette édition.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548114_0014

SUR LA RESOLUTION DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES DU PREMIER ORDRE PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS

INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ assez régulière et soit $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n)$ le vecteur unitaire dirigé suivant la normale extérieure à $\partial\Omega$.

L'objet principal de ce travail est d'approcher la solution des systèmes du 1er ordre suivants, symétriques et positifs au sens de FRIEDRICHS [13] : Trouver une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}^p$ telle que :

$$(1) \quad Au = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0 u = f \qquad \text{dans } \Omega,$$

$$(2) \quad (B - M) u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega,$$

où $B = \sum_{i=1}^{n} \nu_i A_i$. Les matrices A_i, $0 \leq i \leq n$, appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, sont définies dans Ω et satisfont les propriétés.

A_i est symétrique et lipschitzienne en x pour $x \in \bar{\Omega}$, $1 \leq i \leq n$,

$$A_0 + A_0^* - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \geq C_0 I \quad , \quad C_0 > 0 \quad ,$$

A_0 a ses coefficients bornés dans Ω.

Les matrices B et M appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, sont définies sur $\partial\Omega$ et satisfont les propriétés

$$M + M^* \geq 0$$

$$\mathrm{Ker}(B - M) + \mathrm{Ker}(B + M) = \mathbb{R}^p .$$

Lorsque certaines propriétés de régularité sur la dépendance en x sont satisfaites, le problème (1), (2) admet une solution unique $u \in (H^1(\Omega))^p$ ([13], [25], [38]).

Soit W_h (resp. V_h) un espace de dimension finie non nécessairement inclus (resp. inclus) dans $(H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}))^p$.

Dans une première partie (Chapitres I et II), on définit et on étudie différentes méthodes d'approximation du système (1), (2) : méthodes continues lorsque l'on cherche la solution approchée u_h dans l'espace V_h et méthodes discontinues lorsqu'on cherche la solution u_h dans W_h. Dans la deuxième partie (Chapitres III et IV), on considère plus particulièrement l'équation de transport des neutrons :

a) En géométrie plane bidimensionnelle $(x\text{-}y)$ (Chapitre III) :

$$(3) \quad \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = f \qquad \text{, dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \ ,$$

(4) $u = 0$ sur $\partial_- \Omega = \{(x,y) \in \partial\Omega \; ; \; \mu n_x + \nu n_y < 0\}$,

où n_x et n_y sont les composantes de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

b) En géométrie sphérique à une dimension (r,μ) (Chapitre IV) :

(5) $\mu \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) + r \frac{\partial}{\partial \mu}((1-\mu^2)u) + \sigma r^2 u = r^2 f$ dans $\Omega =]0, R[\times]-1,+1[$,

(6) $u(R,\mu) = 0$ pour $\mu < 0$.

Pour ces deux problèmes, on étudie des méthodes d'approximation continues et discontinues, adaptées à la structure des équations, conduisant à des systèmes linéaires de résolution quasi explicite, et de ce fait couramment utilisés en pratique.

Ces deux parties sont précédées d'un Chapitre de préliminaires (Chapitre 0) où on introduit différents types d'éléments finis servant à construire l'espace V_h. On rappelle à cette occasion un certain nombre de résultats maintenant classiques dans l'analyse de la méthode des éléments finis tels que le Lemme de BRAMBLE et HILBERT [2], l'inégalité inverse, des inégalités sur les changements de variables [8] et des résultats d'approximation a plusieurs variables [6]. Certaines généralisations de ces résultats, utiles par la suite sont aussi démontrées.

Au Chapitre I, on considère l'approximation du problème (1), (2) par des méthodes du type éléments finis. Pour définir la méthode continue, on introduit la formulation suivante du problème (1), (2) valable pour toute solution $u \in (H^1(\Omega))^P$:

(7) $\frac{1}{2} \int_\Omega (Au \cdot v + u \cdot A^* v)\, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} Mu \cdot v \, ds = \int_\Omega f \cdot v \, dx$,

pour tout $v \in (H^1(\Omega))^P$, où A^* est l'opérateur adjoint formel de A. Soit V_h un espace de dimension finie inclus dans $(H^1(\Omega))^P$, on cherche $u_h \in V_h$ tel que pour tout $v_h \in V_h$ on ait :

(8) $\frac{1}{2} \int_\Omega (Au_h \cdot v_h + u_h \cdot A^* v_h)\, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} Mu_h \cdot v_h \, ds = \int_\Omega f \cdot v_h \, dx$

On montre en particulier que, lorsque l'espace V_h est construit à partir d'éléments finis K triangulaires ou quadrilatéraux, de diamètres $\leq h$, et si on utilise des polynômes de degré k dans chaque élément K , on a la majoration d'erreur

(9) $\| u - u_h \|_{(L^2(\Omega))^P} \leq C h^k \| u \|_{(H^{k+1}(\Omega))^P}$,

si la solution u est assez régulière (appartient à $(H^{k+1}(\Omega))^P$).

Pour définir la méthode discontinue, on introduit un sous espace W_h de

dimension finie de $(L^2(\Omega))^p$:

$$(10)\quad W_h = \left\{ v_h \in (L^2(\Omega))^p \ ; \ v_h|_K \in (P_K)^p \ , \text{ pour tout } K \right\} ,$$

où P_K désigne l'espace des fonctions de forme sur l'élément K. Les fonctions de W_h sont régulières sur chaque élément K, et en général discontinues aux interfaces de ces éléments.

On cherche alors $u_h \in W_h$ tel que pour tout K et tout $v_h \in W_h$

$$(11)\quad \sum_{K \subset \Omega} \left\{ \int_K (Au_h - f) v_h \, dx - \frac{1}{2} \int_{\partial K} (B_K - M_K)(u_h - \xi_h) \cdot v_h \, ds \right\} = 0 ,$$

où $$\xi_h = \begin{cases} 0 \text{ sur } & \partial K \cap \partial \Omega \\ \text{trace extérieure de } u_h \text{ sur } & \partial K - (\partial K \cap \partial \Omega) \end{cases} ,$$

et où $B_K = \sum_{i=1}^{n} A_i \nu_{i,K}$, les $\nu_{i,K}$, $1 \leq i \leq n$, représentant les composantes de la normale extérieure à ∂K. On montre que pour un choix convenable des matrices de transmission M_K, et si P_K contient l'espace des polynômes de degré $\leq k$, la majoration d'erreur (10) est satisfaite dès que $u \in (H^{k+1}(\Omega))^p$ On termine le Chapitre I en donnant quelques exemples.

Pour calculer les intégrales intervenant dans les formulations (9) et (12), on utilise des formules de quadrature approchée. Au Chapitre II, on examine, en utilisant des techniques développées par P.G. CIARLET et P.A. RAVIART [8] pour les problèmes elliptiques, l'influence de ces formules sur la précision des méthodes. On montre qu'en faisant des hypothèses raisonnables sur la précision des formules de quadrature, l'erreur introduite par ces dernières est du même ordre que l'erreur introduite par la méthode des éléments finis. On termine ce Chapitre II en démontrant, en utilisant des techniques de T. DUPONT [12], des résultats de super convergence, dans certains cas particuliers.

Le Chapitre III est consacré à l'approximation de l'équation de transport bidimensionnelle en symétrie plane (4). On rappelle tout d'abord certaines propriétés particulières au caractère hyperbolique de cette équation ; ceci permet ensuite de définir, avec W.H. REED [42], des méthodes numériques pour lesquelles la résolution s'effectue en suivant la direction caractéristique μ, ν. On introduit tout d'abord les méthodes continues : on cherche $u_h \in V_h$ telle que pour tout K

$$(12)\quad \int_K (Au_h - f) v \, dx\,dy = 0 \quad , \text{ pour tout } \quad v \in P_K' \ ,$$

où l'espace P_K' des fonctions test v est à choisir au mieux.

On généralise ainsi les schémas DSN et SNG ([21], [22]) couramment utilisés en pratique. Pour un choix convenable de P_K' , on montre que la méthode est

stable lorsque les éléments finis K sont des quadrilatères convexes ayant deux côtés éclairés par la direction caractéristique (μ, ν). On montre ensuite des majorations d'erreurs dans certaines normes, analogues discrets de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

On considère ensuite une méthode discontinue : on cherche $u_h \in W_h$ telle que pour tout K et toute fonction $v_h \in P_K$ on ait

$$(13) \quad \int_K (A u_h - f) v_h \, dx\,dy - \int_{\partial_- K} (\mu n_x + \nu n_y)(u_h - \xi_h) v_h \, ds = 0 \quad ,$$

où $$\xi_h = \begin{cases} 0 \text{ sur } & \partial_- K \cap \partial_- \Omega \\ \text{trace extérieure de } u_h \text{ sur } & (\partial_- K) - (\partial_- K \cap \partial_- \Omega) \end{cases} ,$$

$$(14) \quad \partial_- K = \{ (x,y) \in \partial K \; ; \; \mu n_x + \nu n_y < 0 \} \quad .$$

Cette méthode est un cas particulier des méthodes discontinues introduites au Chapitre I, particulièrement adaptée à l'équation (3). On montre la stabilité inconditionnelle de cette méthode, ainsi que des résultats de majorations d'erreur et de super convergence. On termine ce Chapitre en décrivant des résultats numériques obtenus en utilisant ces deux méthodes.

Enfin, au Chapitre IV, on considère l'équation de transport monodimensionnelle en symétrie sphérique (5). On définit une famille de méthodes continues (au sens du Chapitre III) satisfaisant des conditions de conservation des neutrons ; on retrouve en particulier un schéma classique de W.H. REED et K. LATHROP [44]. On montre la stabilité de ces méthodes pour différentes normes avec poids, analogues discrets de la norme

$$(15) \quad \left(\int_0^R \int_{-1}^{+1} r^\gamma (1-\mu^2)^{-\delta} u^2 \, dr\,d\mu \right)^{1/2} \quad , \quad 0 \le \gamma \le 2 \, , \; 0 \le \delta \le 1 \quad .$$

On donne ensuite des résultats de majoration d'erreur dans ces différentes normes. En particulier, pour $\gamma = 2$, $\delta = 0$ on a une erreur en $O\left(h^{11/6} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2}\right)$ et pour $\gamma = \delta = 0$, une erreur en $O\left(h^{3/2} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2}\right)$. Des essais numériques décrits ensuite montrent que ces ordres d'erreur sont très proches des résultats expérimentaux.

TABLE DES MATIERES

Pages

CHAPITRE 0 - RAPPELS DE RESULTATS CLASSIQUES DANS L'ANALYSE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET COMPLEMENTS 6

CHAPITRE I - APPROXIMATION DES SYSTEMES SYMETRIQUES HYPERBOLIQUES PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS CONTINUES ET DISCONTINUES

1. Le problème continu 26
2. Approximation du problème par une méthode de Rayleigh - Ritz - Galerkin 33
3. Application aux éléments finis 39
4. Méthodes d'éléments finis discontinues ; résultats généraux 49
5. Méthodes d'éléments finis discontinues ; exemples et superconvergence 59

CHAPITRE II - UTILISATION DE FORMULES DE QUADRATURE APPROCHEE POUR LES METHODES D'ELEMENTS FINIS DECRITES AU CHAPITRE PRECEDENT

1. Définitions et majorations abstraites 79
2. Majorations d'erreur 87
3. Un résultat de superconvergence 99

CHAPITRE III - APPROXIMATION DE L'EQUATION DE TRANSPORT EN GEOMETRIE BIDIMENSIONNELLE PLANE PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS CONTINUES ET DISCONTINUES

1. Position du problème 113
2. Méthodes d'éléments finis continues 123
3. Méthodes d'éléments finis discontinues 147
4. Résultats numériques 160

CHAPITRE IV - APPROXIMATION DE L'EQUATION DE TRANSPORT EN GEOMETRIE SPHERIQUE MONODIMENSIONNELLE PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS CONTINUES

1. Position du problème 168
2. Méthodes continues : Définitions 173
3. Méthodes continues : Stabilité et convergence 185
4. Résultats numériques 209

CHAPITRE 0

RAPPELS DE RESULTATS CLASSIQUES DANS L'ANALYSE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET COMPLEMENTS

On rappelle dans ce Chapitre 0 un certain nombre de résultats maintenant classiques dans l'analyse de la méthode des éléments finis. Certaines généralisations de ces résultats, utiles par la suite, sont aussi démontrées.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$, C^1 par morceaux. Pour tout réel q tel que $1 \leq q < \infty$, on appelle $(L^q(\Omega))^p$ (par abus de notation, on écrira simplement $L^q(\Omega)$) l'ensemble des fonctions $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ mesurables pour la mesure de LEBESGUE, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et telles que

$$\|u\|_{q,\Omega} = \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{p} |u_j(x)|^q \right) dx \right)^{1/q} < +\infty \quad , \text{ pour } \quad q < +\infty \ , \tag{0.1}$$

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\sup_{x \in \Omega}{}^{\text{ess}} |u_j(x)| \right) < +\infty \quad , \text{ pour } \quad q = +\infty \ . \tag{0.2}$$

Pour tout entier $m \geq 0$, on note

$$W^{m,q}(\Omega) = \left\{ u \in L^q(\Omega) \ ; \ \partial^\alpha u \in L^q(\Omega) \text{ pour tout } |\alpha| \leq m \right\} , \tag{0.3}$$

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \tag{0.4}$$

Les espaces de SOBOLEV habituels, pour $1 \leq q \leq +\infty$, où α est un multiindice tel que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

Sur les espaces définis ci-dessus, on utilise les normes et semi-normes

$$\|u\|_{m,q,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{q,\Omega}^q \right)^{1/q} \ , \tag{0.5}$$

$$|u|_{m,q,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha u\|_{q,\Omega}^q \right)^{1/q} \ , \tag{0.6}$$

$$(0.7)\quad [u]_{m,q,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right\|_{q,\Omega}^q \right)^{1/q} ,$$

pour $1 \leq q < +\infty$, et

$$(0.8)\quad \|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max \left\{ \|\partial^\alpha u\|_{\infty,\Omega} \; ; \; |\alpha| \leq m \right\} ,$$

$$(0.9)\quad |u|_{m,\infty,\Omega} = \max \left\{ \|\partial^\alpha u\|_{\infty,\Omega} \; ; \; |\alpha| = m \right\} ,$$

$$(0.10)\quad [u]_{m,\infty,\Omega} = \max \left\{ \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right\|_{\infty,\Omega} \; ; \; 1 \leq i \leq n \right\} .$$

soit $\left(W^{m,q}(\Omega)\right)'$ le dual fort de $W^{m,q}(\Omega)$. On note (f,u) la dualité entre un élément u de $W^{m,q}(\Omega)$ et un élément f de $\left(W^{m,q}(\Omega)\right)'$ et on définit la norme duale par

$$(0.11)\quad \|f\|^*_{m,q,\Omega} = \sup \left\{ \frac{|(f,v)|}{\|v\|_{m,q,\Omega}} \; ; \; v \in W^{m,q}(\Omega) \; , \; v \neq 0 \right\} .$$

Les notations introduites ci-dessus sont aussi utilisées par la suite avec Ω remplacé par $\partial\Omega$.

En raisonnant par cartes locales (LIONS [33, Tome 1], NECAS [35, Chapitre I]) on a :

Lemme 0.1 : On suppose l'ouvert Ω borné. Alors il existe une constante C dépendant de Ω telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on ait

$$(0.12)\quad |u|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \left(|u|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2} .$$

Soit P_k l'espace des polynômes de la forme

$$q(x) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n \leq k} c_{i_1 i_2 \cdots i_n} \, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} ,$$

et Q_k l'espace des polynômes de la forme

$$q(x) = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n \leq k} c_{i_1 i_2 \cdots i_n} \, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} .$$

On rappelle le résultat suivant (L. TARTAR, communication personnelle), dont la démonstration se trouve aussi dans un article de BREZZI-MARINI [3] :

Lemme 0.2 : Soient un espace de BANACH E et deux espaces normés E_1 et E_2 On considère deux opérateurs linéaires $A_i \in \mathcal{L}(E; E_i)$, $i = 1, 2$ tels que :

(i) $\|A_1 v\|_{E_1} + \|A_2 v\|_{E_2}$ définit sur E une norme équivalente à la norme $\|v\|_E$

(ii) L'opérateur A_1 est compact.

Soit d'autre part P le noyau de l'opérateur A_2 .
Alors l'application $v \longrightarrow \| A_2 v \|_{E_2}$ est une norme sur l'espace quotient E/P équivalente à la norme quotient.

A partir du Lemme 0.2, on peut montrer le résultat suivant, très utile par la suite :

Lemme 0.3 : On considère un ouvert borné Ω , de frontière continue (NECAS [35, Chapitre II]). Soient q tel que $1 \leq q \leq +\infty$, k et r deux entiers ≥ 0 . D'autre part, soit $f \in \left(W^{k+r+1,q}(\Omega) \right)'$ telle que :

(0.13) $(f, u) = 0$ pour tout $u \in P_k$ (resp. Q_k) .

Alors il existe une constante $C = C(n, k, r, q, \Omega)$ telle que :

$$(0.14) \quad |(f,u)| \leq C \, \|f\|^*_{k+r+1,q,\Omega} \sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} |u|_{\ell,q,\Omega} \quad ,$$

$$(0.15) \quad \text{resp.} \quad |(f,u)| \leq C \, \|f\|^*_{k+r+1,q,\Omega} \sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} [u]_{\ell,q,\Omega} \quad ,$$

pour tout $u \in W^{k+r+1,q}(\Omega)$.

Démonstration. On applique le Lemme 0.2 avec $E = W^{k+r+1,q}(\Omega)$, $E_1 = W^{k,q}(\Omega)$, $E_2 = \left(L^q(\Omega) \right)^N$, $N = \sum_{\ell=0}^{r} N_\ell$, où N_ℓ désigne le nombre de dérivées possibles d'ordre $k+\ell+1$. L'opérateur A_1 est l'opérateur identité et l'opérateur A_2 fait correspondre à toute fonction $v \in W^{k+r+1,q}(\Omega)$, l'ensemble de toutes ses dérivées d'ordre $|\alpha^0|, |\alpha^1|, \ldots\ldots, |\alpha^r|$ où α^ℓ est un multiindice tel que $|\alpha^\ell| = k+\ell+1$, $0 \leq \ell \leq r$.

Les hypothèses (i) et (ii) du Lemme 0.2 sont donc satisfaites et le noyau de A_2 est l'espace P_k . On en déduit que la semi-norme $\sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} |\cdot|_{\ell,q,\Omega}$ est une norme sur l'espace quotient $W^{k+r+1,q}(\Omega)/P_k$, équivalente à la norme quotient

$$\| \bar{u} \|_{W^{k+r+1,q}(\Omega)/P_k} = \inf \{ \| u+v \|_{k+r+1,q,\Omega} \; ; \; v \in P_k \} \quad ,$$

où $\bar{u}$ dénote la classe d'équivalence de l'un quelconque de ses éléments u .
Il existe donc une constante C ne dépendant que de n, k, r, q et Ω telle que

$$(0.16) \quad \| \bar{u} \|_{W^{k+r+1,q}(\Omega)/P_k} \leq C \sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} |u|_{\ell,q,\Omega} \quad ,$$

pour tout $u \in W^{k+r+1,q}(\Omega)$.

Soit $f \in \left(W^{k+r+1,q}(\Omega) \right)'$ satisfaisant l'égalité (0.13) ; on a

$(f,u) = (f,u+v)$ pour tout $u \in W^{k+r+1,q}(\Omega)$ et tout $v \in P_k$ de telle sorte que

$$|(f,u)| \leq \|f\|^*_{k+r+1,q,\Omega} \inf \left\{ \|u+v\|_{k+r+1,q,\Omega} \; ; \; v \in P_k \right\} ,$$

$$|(f,u)| \leq c \|f\|^*_{k+r+1,q,\Omega} \sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} |u|_{\ell,q,\Omega} ,$$

ce qui termine la démonstration de l'inégalité (0.14).

Pour montrer l'inégalité (0.15), on applique le Lemme 0.2, avec $E = W^{k+r+1,q}(\Omega)$, $E_1 = W^{k,q}(\Omega)$ et $E_2 = \left(L^q(\Omega) \right)^{n(r+1)}$.

L'opérateur A_1 est l'identité, et l'opérateur A_2 est celui qui a toute fonction de $W^{k+r+1}(\Omega)$ fait correspondre ses $n(r+1)$ dérivées d'ordre respectivement égal à $k+1, k+2, \ldots, k+r+1$, dans les directions $x_1, \ldots, x_n$. Un résultat dû à ARONSZAJN et SMITH, démontré dans [45], entraîne que l'hypothèse (i) du Lemme 0.2 est satisfaite. L'hypothèse (ii) du Lemme 0.2 est satisfaite grâce au Lemme de RELLICH et KONDRACHOFF démontré dans [32, Chapitre II] et dans [35, pages 17 et 106].

D'autre part, on a $Q_k = \mathrm{Ker}\, A_2$. On en déduit que la semi-norme $\sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} [u]_{\ell,q,\Omega}$ est une norme sur l'espace quotient $W^{k+r+1,q}(\Omega)/Q_k$ équivalente à la norme

$$\|\tilde{u}\|_{W^{k+r+1,q}(\Omega)/Q_k} = \inf \left\{ \|u+v\|_{k+r+1,q,\Omega} \; ; \; v \in Q_k \right\} , \tag{0.17}$$

où $\tilde{u}$ désigne la classe d'équivalence de l'un quelconque de ses éléments u . Il existe donc une constante $C > 0$ ne dépendant que de n, k, q et Ω telle que

$$\|\tilde{u}\|_{W^{k+r+1,q}(\Omega)/Q_k} \leq C \sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} [u]_{\ell,q,\Omega} , \tag{0.18}$$

pour tout $u \in W^{k+r+1,q}(\Omega)$.

L'inégalité (0.15) se montre alors, à partir de l'inégalité (0.18), de la même façon que l'inégalité (0.14).

Par la suite on utilise fréquemment le Lemme 0.2 pour $r = 0$, ce qui n'est pas autre chose que le Lemme de BRAMBLE et HILBERT [2] que l'on peut aussi trouver dans CIARLET et RAVIART [6].

Le résultat suivant est une généralisation du Lemme 0.3 permet de préciser la valeur des constantes C intervenant dans les inégalités (0.14) et (0.15), ce qui peut être utile pour certaines applications (voir Chapitres III et IV) et aussi CIARLET et LESAINT [9]) :

Lemme 0.4 : On considère un ouvert borné Ω , de frontière continue. Soient un nombre q tel que $1 \leq q \leq +\infty$ et deux entiers k et r , avec $k \geq 0$, $r \geq 1$. D'autre part soit une forme linéaire f continue sur $W^{k+r+1,q}(\Omega)$ telle que :

$$(0.19)\quad |(f,u)| \leq \|f\|^*_{k+r+1,q,\Omega} \sum_{\ell=k+1}^{k+r} \left(\eta_\ell |u|_{\ell,q,\Omega} + \mu_\ell [u]_{\ell,q,\Omega} \right),$$

pour tout $u \in P_{k+r}$ (resp. Q_{k+r}).
Alors il existe une constante $C = C(n,k,r,q,\Omega)$ telle que

$$(0.20)\quad |(f,u)| \leq C \|f\|^*_{k+r+1,q,\Omega} \sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} \left(\alpha_\ell |u|_{\ell,q,\Omega} + \beta_\ell [u]_{\ell,q,\Omega} \right),$$

pour tout $u \in W^{k+r+1,q}(\Omega)$, avec

$$\alpha_\ell = \eta_\ell \quad , \quad \beta_\ell = \mu_\ell \quad , \quad \text{pour} \quad k+1 \leq \ell \leq k+r$$

$$\alpha_{k+r+1} = 1 + \sum_{\ell=k+1}^{k+r} \eta_\ell \quad , \quad \beta_{k+r+1} = \sum_{\ell=k+1}^{k+r} \mu_\ell \quad ,$$

$$\left(\text{resp. } \alpha_{k+r+1} = \sum_{\ell=k+1}^{k+r} \eta_\ell \quad , \quad \beta_{k+r+1} = 1 + \sum_{\ell=k+1}^{k+r} \mu_\ell \right) .$$

Démonstration : On considère d'abord le cas où l'égalité (0.19) est satisfaite pour $u \in P_{k+r}$. La propriété suivante est satisfaite (d'après la démonstration du Lemme 0.3) :

La semi-norme $|\cdot|_{k+r+1,q,\Omega}$ est une norme sur l'espace quotient $W^{k+r+1,q}(\Omega)/P_{k+r}$, équivalente à la norme quotient :

$$(0.21)\quad \|\bar{u}\|_{W^{k+r+1,q}(\Omega)/P_{k+r}} = \inf \left\{ \|u+v\|_{k+r+1,q,\Omega} \, ; \, v \in P_{k+r} \right\},$$

où $\bar{u}$ dénote la classe d'équivalence de l'un quelconque de ses éléments u. Il existe donc une constante $C = C(n,k,r,q,\Omega)$, et un polynôme v_0 de P_{k+r} tels que

$$(0.22)\quad \|u+v_0\|_{k+r+1,q,\Omega} \leq C |u|_{k+r+1,q,\Omega} .$$

Soit maintenant $f \in \left(W^{k+r+1,q}(\Omega) \right)'$ satisfaisant l'inégalité (0.19).
On a :

$$(f,u) = (f, u+v_0) - (f, v_0) \quad ,$$

d'où on déduit :

$$(0.23)\quad |(f,u)| \leq \|f\|^*_{k+r+1,q,\Omega} \|u+v_0\|_{k+r+1,q,\Omega} + |(f,v_0)| .$$

D'après l'inégalité (0.19), on a :

$$(0.24)\quad |(f, v_o)| \leq \|f\|^*_{k+r+1,q,\Omega} \sum_{\ell=k+1}^{k+r} \left(\eta_\ell |v_o|_{\ell,q,\Omega} + \mu_\ell [v_o]_{\ell,q,\Omega} \right) .$$

D'après l'inégalité (0.22), on a :

$$(0.25)\quad |v_o|_{\ell,q,\Omega} \leq |u|_{\ell,q,\Omega} + C |u|_{k+r+1,q,\Omega} ,$$

$$(0.26)\quad [v_o]_{\ell,q,\Omega} \leq [u]_{\ell,q,\Omega} + C |u|_{k+r+1,q,\Omega} ,$$

pour tout entier $\ell \leq k+r$.

En combinant les relations (0.22) à (0.26) on obtient l'inégalité (0.21). Dans le cas où l'inégalité (0.19) est satisfaite pour $u \in Q_{k+r}$, il existe comme précédemment une constante $C = C(n, k, r, q, \Omega)$ et un polynôme v_o de Q_{k+r} tels que :

$$\|u + v_o\|_{k+r+1,q,\Omega} \leq C [u]_{k+r+1,q,\Omega} .$$

On en déduit les inégalités :

$$|v_o|_{\ell,q,\Omega} \leq |u|_{\ell,q,\Omega} + C [u]_{k+r+1,q,\Omega} ,$$

$$[v_o]_{\ell,q,\Omega} \leq [u]_{\ell,q,\Omega} + C [u]_{k+r+1,q,\Omega} ,$$

pour tout entier $\ell \leq k+r$

En combinant les inégalités (0.23) et (0.24) avec les trois dernières relations, on obtient l'inégalité (0.20).

Dans le cas particulier où Ω est un ouvert borné $\subset \mathbb{R}^2$, on a le résultat suivant [27] :

Lemme 0.5 : Soit un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, de frontière continue. Soient un nombre q tel que $1 \leq q \leq +\infty$ et un entier $k \geq 0$. D'autre part, soit une forme linéaire f continue sur $W^{k+2,q}(\Omega)$ telle que

$$(0.27)\quad |(f,u)| \leq \varepsilon \|f\|^*_{k+2,q,\Omega} [u]_{k+1,q,\Omega}) \quad \text{pour tout} \quad u \in Q_k \cup P_{k+1} .$$

Alors il existe une constante $C = C(k, q, \Omega)$ telle que

$$(0.28)\quad |(f,u)| \leq C \|f\|^*_{k+2,q,\Omega} \left((1+\varepsilon) \left([u]_{k+2,q,\Omega} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]_{k,q,\Omega} \right) + \varepsilon [u]_{k+1,q,\Omega} \right),$$

pour tout $u \in W^{k+2,q}(\Omega)$.

Démonstration. On procède comme pour démontrer les Lemmes 0.3 et 0.4. On applique le Lemme 0.2 avec $E = W^{k+2,q}(\Omega)$, $E_1 = L^q(\Omega)$, $E_2 = (L^q(\Omega))^4$. L'opérateur A_1 est l'opérateur identité et l'opérateur A_2 fait correspondre à toute fonction $v \in W^{k+2,q}(\Omega)$ le quadruplet

$$\left(\frac{\partial^{k+2} v}{\partial x^{k+2}} , \frac{\partial^{k+2} v}{\partial y^{k+2}} , \frac{\partial^{k+2} v}{\partial x^{k+1} \partial y} , \frac{\partial^{k+2} v}{\partial x \partial y^{k+1}} \right)$$

. En utilisant un résultat de ARONSZAJN et SMITH [45] et le Lemme de RELLICH et KONDRACHOFF [35], on montre que les hypothèses (i) et (ii) du Lemme (0.2) sont satisfaites. D'autre part, on a $\mathrm{Ker}\, A_2 = Q_k \cup P_{k+1}$. D'après le Lemme 0.3, on en déduit que

la semi-norme $[u]_{k+2,q,\Omega} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right]_{k,q,\Omega}$ est une norme sur l'espace quotient $W^{k+2,q}(\Omega)/(Q_k \cup P_{k+1})$, équivalente à la norme

$$\| \tilde{u} \|_{W^{k+2,q}(\Omega)/(Q_k \cup P_{k+1})} = \inf \{ \| u + p \|_{k+2,q,\Omega} ; p \in Q_k \cup P_{k+1} \},$$

où $\tilde{u}$ désigne la classe d'équivalence de l'un quelconque de ses éléments u. Il existe donc une constante $C = C(k, q, \Omega)$ et un polynôme $p_0 \in Q_k \cup P_{k+1}$ tels que

$$(0.29) \quad \| u + p_0 \|_{k+2,q,\Omega} \leq C \left([u]_{k+2,q,\Omega} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]_{k,q,\Omega} \right) .$$

Soit maintenant une forme linéaire f continue sur $W^{k+2,q}(\Omega)$ et satisfaisant l'inégalité (0.27). On a

$$(f, u) = (f, u + p_0) - (f, p_0)$$

d'où

$$|(f, u)| \leq \| f \|^*_{k+2,q,\Omega} \left(\| u + p_0 \|_{k+2,q,\Omega} + \varepsilon [p_0]_{k+1,q,\Omega} \right).$$

D'après l'inégalité (0.29) on peut écrire que

$$[p_0]_{k+1,q,\Omega} \leq [u]_{k+1,q,\Omega} + C \left([u]_{k+2,q,\Omega} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]_{k,q,\Omega} \right) .$$

En combinant les quatre dernières relations, on obtient l'inégalité (0.28).

On rappelle maintenant les définitions et quelques propriétés des éléments finis utilisés dans les chapitres suivants. Pour plus de détails sur ces définitions et pour la démonstration de certains résultats, on renvoie à CIARLET [5], RAVIART [41]. On se limite ici aux éléments finis correspondant à de l'interpolation de Lagrange car ce sont les seuls éléments utilisés aux Chapitres III et IV. D'autre part les résultats obtenus aux Chapitres I et II peuvent aisément s'étendre au cas des éléments finis correspondant à de l'interpolation d'HERMITE.

Définition 0.1. Un élément fini de LAGRANGE (K, Σ, P) correspond aux trois données suivantes :

(i) Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$

(ii) Un ensemble $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\}$ de N points distincts de l'ensemble K, appelés noeuds de l'élément fini,

(iii) Un espace P, de dimension N, de fonctions (les fonctions de forme) définies sur l'ensemble K tel que l'ensemble Σ soit P-unisolvant, c'est-à-dire qu'étant donné N nombres réels arbitraires α_i, $1 \le i \le N$, il existe une fonction $p \in P$ et une seule telle que

$$p(a_i) = \alpha_i \quad , \quad 1 \le i \le N \quad . \tag{0.30}$$

Il existe donc une fonction $p_i \in P$ et une seule qui vérifie

$$p_i(a_j) = \delta_{ij} \quad , \quad 1 \le j \le N \quad , \tag{0.31}$$

δ_{ij} étant le symbole de KRONECKER. Les N fonctions p_i sont appelées les fonctions de base de l'élément fini et toute fonction $p \in P$ peut s'écrire sous la forme :

$$p = \sum_{i=1}^{N} p(a_i)\, p_i \quad . \tag{0.32}$$

Définition 0.2. Soient un élément fini (K, Σ, P) et une fonction v définie sur un ensemble contenant l'ensemble Σ. On appelera fonction P-interpolée de la seule fonction de l'espace qui vérifie :

$$\Pi v(a_i) = v(a_i) \quad , \quad 1 \le i \le N \quad . \tag{0.33}$$

Définition 0.3. A partir d'un élément fini de Lagrange $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ appelé par la suite élément de référence, et d'une application injective F de $\hat{K}$ dans $\mathbb{R}^n$, on définit un nouvel élément fini de Lagrange (K, Σ, P) par :

$$K = F(\hat{K}) \quad , \tag{0.34}$$

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \{a_i\} \qquad a_i = F(\hat{a}_i) \, , \; 1 \le i \le N \, , \tag{0.35}$$

$$P = \left\{ p : K \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; p = \hat{p} \circ F^{-1} \quad , \; \forall \hat{p} \in \hat{P} \right\} , \tag{0.36}$$

la fonction $F^{-1} : K \longrightarrow \hat{K}$ étant l'application réciproque de l'application

Les éléments finis $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ et (K, Σ, P) sont dits <u>équivalents</u>.

On utilise constamment par la suite les bijections :

$$(0.37)\qquad \hat{x} \in \hat{K} \longrightarrow x = F(\hat{x}) \in K\ ,\quad x \in K \longrightarrow \hat{x} = F^{-1}(x) \in \hat{K}\ ,$$

$$(0.38)\qquad \hat{p} \in \hat{P} \longrightarrow p = \hat{p} \circ F^{-1} \in P\ ,\quad p \in P \longrightarrow \hat{p} = p \circ F \in \hat{P}\ .$$

De même, à toute fonction $\hat{v} : \hat{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $v : K \longrightarrow \mathbb{R}$), on associe la fonction $v : K \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\hat{v} : \hat{K} \longrightarrow \mathbb{R}$) définie par

$$(0.39)\qquad v = \hat{v} \circ F^{-1} \qquad (\text{ resp. } \hat{v} = v \circ F)$$

Les fonctions $p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1}$, $1 \leq i \leq n$, où les $\hat{p}_i$ étant les fonctions de base définies en (0.31) constituent une base de P. D'autre part, les fonctions P-interpolée Πv de v et $\hat{P}$-interpolée $\hat{\Pi}\hat{v}$ de $\hat{v}$, où les fonctions v et $\hat{v}$ vérifient la relation (0.39), sont liées par la relation :

$$(0.40)\qquad \widehat{\Pi v} = \hat{\Pi}\hat{v}\ .$$

Les transformations F utilisées par la suite sont les suivantes :

(i) La transformation $F : \hat{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est la restriction à l'ensemble $\hat{K}$ d'une <u>application affine inversible</u>, c'est-à-dire, l'application F est de la forme :

$$(0.41)\qquad F : \hat{x} \in \hat{K} \longrightarrow F(\hat{x}) = B\hat{x} + b\ ,$$

où B est un élément inversible de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Dans le cas de la dimension d'espace égale à 2, on utilise aussi une transformation $F : \hat{K} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, restriction à l'ensemble $\hat{K}$ d'une application inversible appartenant à $(Q_1)^2$

Certaines hypothèses simplificatrices sur la géométrie des éléments finis et des domaines considérés sont couramment faites par la suite :

On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est un <u>ouvert polyédrique</u> si l'ensemble $\overline{\Omega}$ est un polyèdre. On définit ensuite une <u>triangulation</u> $\mathcal{C}_h$ de l'ouvert polyédrique Ω, par la donnée d'un certain nombre d'éléments finis (K, Σ, P), $K \in \mathcal{C}_h$, tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_h} K$,

(ii) $\mathring{K}_1 \cap \mathring{K}_2 = \emptyset$ si $K_1 \neq K_2$,

(iii) Tous les éléments de la triangulation sont des polyèdres,

(IV) Toute (n-1)-face d'un élément fini K_1 est, soit une (n-1)-face d'un autre élément K_2, les éléments K_1 et K_2 étant alors adjacents, soit une partie de la frontière $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω ,

(V) Toutes les fois que deux éléments finis K_1 et K_2 sont adjacents, on a

$$\Sigma_{K_1} \cap K_2 = \Sigma_{K_2} \cap K_1 \quad .$$

A une triangulation $\mathcal{C}_h$, on associe l'ensemble

$$\Sigma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_h} \Sigma_K$$

qu'on appelle ensemble des noeuds de la triangulation. On définit les espaces de fonctions W_h et V_h par

(0.42) $W_h = \prod_{K \in \mathcal{C}_h} P_K$,

(0.43) V_h = le sous espace de W_h constitué des fonctions continues aux noeuds de la triangulation, c'est-à-dire : pour tout $v \in V_h$ et pour tout couple d'éléments adjacents K_1 et K_2 , on a

(0.44) $$v|_{K_1}(a) = v|_{K_2}(a) \quad , \quad \forall a \in \Sigma_{K_1} \cap K_2 = \Sigma_{K_2} \cap K_1 .$$

Définition 0.4 : Soit v une fonction définie sur Σ_h, la fonction appelée fonction V_h-interpolée de la fonction v, est la seule fonction de l'espace V_h qui vérifie les relations

(0.45) $\forall a \in \Sigma_h$, $\Pi_h v(a) = v(a)$,

ou de façon équivalente, les relations

(0.46) $\forall K \in \mathcal{C}_h$, $\Pi_h v|_K = \Pi_K v$.

En général, les fonctions de l'espace V_h ne sont pas définies sur l'ensemble $\bar{\Omega}$ puisqu'elles n'ont pas de détermination unique le long des faces

communes aux éléments finis adjacents, sauf aux noeuds (c'est en particulier le cas lorsque l'espace V_h est construit à partir de l'élément fini quadrilatéral non conforme décrit plus loin dans l'exemple 0.3). Les deux définitions suivantes permettent d'énoncer des conditions garantissant l'inclusion $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$.

Définition 0.5 : Un élément fini (K, Σ, P) est de classe C^0 si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(0.47) (i) $\quad P \subset C^0(K)$,

(ii) Si K' est une (n-1)-face quelconque de l'ensemble K, l'ensemble

$$\Sigma|_{K'} = \Sigma \cap K'$$

est $P|_{K'}$-unisolvant, où

(0.48) $$P|_{K'} = \{ p|_{K'} \; ; \; \forall p \in P \} .$$

Définition 0.6 : Une triangulation est de classe C^0 si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Tous les éléments finis de la triangulation sont de classe C^0

(ii) Pour tout couple d'éléments finis adjacents K_1 et K_2 de la triangulation, on a $P_{K_1}|_{K'} = P_{K_2}|_{K'}$ avec $K' = K_1 \cap K_2$

Soit $\mathcal{C}_h$ une triangulation de classe C^0 d'un ouvert polyédrique Ω, l'espace V_h associé, construit comme en (0.43) vérifie l'inclusion :

(0.49) $$V_h \subset C^0(\bar{\Omega}) .$$

Si on suppose de plus que les inclusions $P_K \subset H^1(K)$, $K \in \mathcal{C}_h$ sont satisfaites, on a aussi :

(0.50) $$V_h \subset H^1(\Omega) .$$

Un élément fini équivalent à un élément fini de classe C^0 est lui aussi de classe C^0 . Ceci permet donc de construire l'espace V_h à partir d'un élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ et d'une famille de transformation F_K , $K \in \mathcal{C}_h$, telles que celles décrites précédemment.

Soit $\partial\Omega$ la frontière de l'ouvert polyédrique Ω . Le résultat suivant sur les traces est une conséquence de [35, Théorème 5.5 page 99].

Lemme 0.6 : Soit une triangulation $\mathcal{C}_h$ de Ω . Soient un entier $m \geq 0$ et un nombre $q > 1$. Pour toute fonction $u \in W^{m+1,q}(\Omega)$, on a

(0.51) $$\Big(\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{S \subset \partial\Omega \cap \partial K} |u|^q_{m,q,S} \Big)^{1/q} \leq c \left(|u|_{m,q,\Omega} + |u|_{m+1,q,\Omega} \right) ,$$

où S désigne une (n-1)-face quelconque d'un élément $K \in \mathcal{C}_k$, et où la constante C ne dépend pas de la triangulation $\mathcal{C}_k$.

Exemple 0.1 : Eléments simpliciaux

On dit qu'un élément fini (K, Σ, P) est de type simpliciel s'il est équivalent à un élément $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ tel que $\hat{K}$ soit un n-simplexe.

Soit $\hat{K}$ un n-simplexe non dégénéré de $\mathbb{R}^n$, de sommets $\hat{a}_i$, $1 \leq i \leq n+1$. Tout point $\hat{x} \in \hat{K}$ admet une représentation unique de la forme

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\hat{x})\, \hat{a}_i \quad , \tag{0.52}$$

avec $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $1 \leq i \leq n+1$, où les λ_i sont les coordonnées barycentriques du point $\hat{x}$ par rapport aux points $\hat{a}_i$, $1 \leq i \leq n+1$.

Pour tout entier $k \geq 1$, le treillis principal d'ordre k du n-simplexe $\hat{K}$ est l'ensemble

$$\hat{\Sigma}_k = \left\{ \hat{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \hat{a}_i \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \ , \ \lambda_i \in \left\{0, \tfrac{1}{k}, \dots, \tfrac{k-1}{k}, 1\right\}, 1 \leq i \leq n+1 \right\} \tag{0.53}$$

On peut montrer ([36]) que l'ensemble $\hat{\Sigma}_k$ est P_k-unisolvant. Le triplet $(\hat{K}, \hat{\Sigma}_k, P_k)$ constitue donc un élément fini de Lagrange. Les éléments finis (K, Σ, P) équivalents au triplet $(\hat{K}, \hat{\Sigma}_k, P_k)$ sont appelés n-simplexes de type k.

Exemple 0.2 : Eléments quadrilatéraux

On appelle hypercube de référence $\hat{K} \subset \mathbb{R}^n$, ou carré de référence si $n=2$ l'ensemble :

$$\hat{K} = [-1,+1]^n = \left\{ \hat{x} = (\hat{x}_i) \in \mathbb{R}^n \ ; \ -1 \leq \hat{x}_i \leq +1 \ , \ 1 \leq i \leq n \right\} . \tag{0.54}$$

On dit qu'un élément fini (K, Σ, P) est quadrilatéral s'il est équivalent (par l'intermédiaire d'une bijection qui est ici affine dans le cas d'une dimension d'espace quelconque et est un élément de $(Q_1)^2$ lorsque la dimension $n=2$) à un élément fini $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ tel que $\hat{K}$ soit l'hypercube de référence. L'ensemble K est alors un parallélotope si la dimension n est quelconque, ou un quadrilatère quelconque en dimension $n=2$ (ce quadrilatère sera un parallélogramme si la transformation F est affine).

Pour tout entier $k \geq 1$, on définit l'ensemble :

$$\widehat{\square}_k = \left\{ \hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ \hat{x}_j \in \left\{-1, -1+\tfrac{2}{k}, \dots, 1-\tfrac{2}{k}, 1\right\}, 1 \leq j \leq n \right\} . \tag{0.55}$$

On montre ([41]) que l'ensemble $\hat{\Sigma}_k$ est Q_k-unisolvant. Le triplet $(\hat{K}, \hat{\Sigma}_k, Q_k)$ définit donc un élément fini de Lagrange. On appelle quadrilatère de type k tout élément fini (K, Σ, P) équivalent par l'intermédiaire de la transformation citée plus haut à l'élément fini $(\hat{K}, \hat{\Sigma}_k, Q_k)$. Les quadrilatères de type k sont des éléments de classe C^0.

On s'intéresse tout particulièrement par la suite (Chapitres III et IV) au cas de la dimension $n=2$. On note ξ et η (resp. x et y) les coordonnées d'un point quelconque $\hat{M}$ (resp. M) de l'élément $\hat{K}$ (resp. K). Soient (x_i, y_i) les coordonnées des sommets a_i, $1 \le i \le 4$, du quadrilatère K, image du carré $\hat{K}$ de sommets $\hat{a}_i$, $1 \le i \le 4$ (figure 0.1). La transformation F s'écrira :

$$(0.56)\quad F: \begin{cases} x = \dfrac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} x_1 + \dfrac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} x_2 + \dfrac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} x_3 + \dfrac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} x_4 , \\ y = \dfrac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} y_1 + \dfrac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} y_2 + \dfrac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} y_3 + \dfrac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} y_4 . \end{cases}$$

Les fonctions p de l'espace P s'expriment de façons très simples, en coordonnées ξ et η, en fonction de leurs valeurs aux points de l'ensemble Σ Dans le cas où $k=1$, on a en particulier :

$$(0.57)\quad p(x,y) = \hat{p}(\xi,\eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} p(a_1) + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} p(a_2) + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} p(a_3) + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} p(a_4)$$

avec : $(x,y) = F(\xi,\eta)$.

Dans le cas où $k=2$, on a :

$$(0.58)\quad p(x,y) = \hat{p}(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1+\eta)\,p(a_1) + \tfrac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(1+\eta)\,p(a_2) +$$
$$+ \tfrac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1-\eta)\,p(a_3) + \tfrac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(\eta-1)\,p(a_4) + \tfrac{1}{2}\eta(1+\eta)(1-\xi^2)\,p(a_5) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\eta(\eta-1)(1-\xi^2)\,p(a_7) + \tfrac{1}{2}\xi(\xi-1)(1-\eta^2)\,p(a_6) + \tfrac{1}{2}\xi(1+\xi)(1-\eta^2)\,p(a_8) + (1-\xi^2)(1-\eta^2)\,p(a_9),$$

avec $(x,y) = F(\xi,\eta)$.

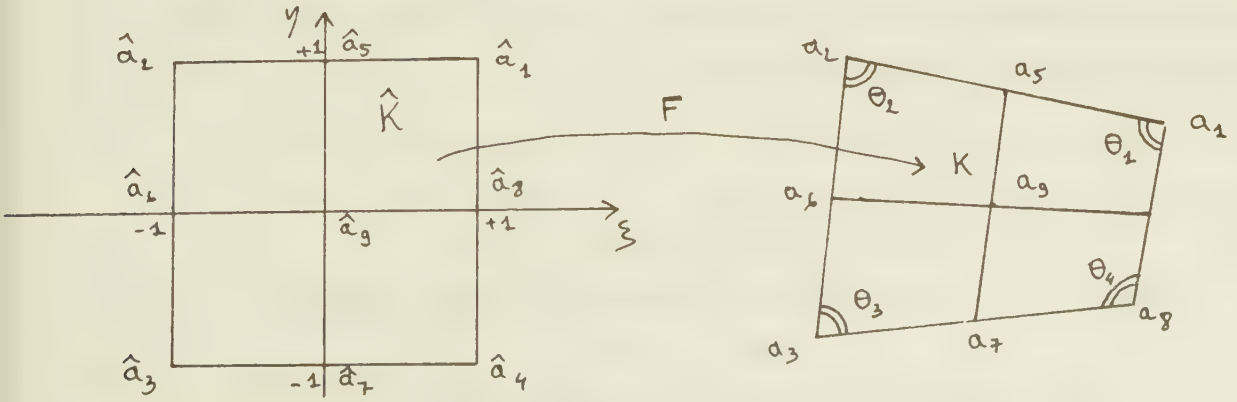


Figure 0.1 Elément quadrilatéral quelconque

Exemple 0.3 : Elément quadrilatéral non-conforme

L'ensemble des points $\hat{a}_i$, $5 \le i \le 8$, n'est pas Q_1-unisolvant, c'est-à-dire, il n'existe pas de polynôme de l'espace Q_1 prenant des valeurs arbitraires α_i aux points $\hat{a}_i$, $5 \le i \le 8$

Par contre, on a le résultat suivant :

Il existe un polynôme de P_1 unique, prenant des valeurs données arbitraires α_i, aux points a_i, $5 \le i \le 8$, dès que la relation suivante est satisfaite :

$$\alpha_5 + \alpha_7 = \alpha_2 + \alpha_4 \quad . \tag{0.59}$$

Ceci nous permet encore de définir un élément fini quadrilatéral, avec $\hat{K} = [-1,+1]^2$, $\hat{P} = P_1$

Toute fonction $\hat{p} \in \hat{P}$ s'exprime en fonction de ses valeurs $\hat{p}(\hat{a}_i)$ aux points $\hat{a}_i$, $5 \le i \le 8$, de la façon suivante :

$$\hat{p}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(\hat{p}(\hat{a}_5) + \hat{p}(\hat{a}_7)\right) + \frac{\xi}{2}\left(\hat{p}(\hat{a}_8) - \hat{p}(\hat{a}_6)\right) + \frac{\eta}{2}\left(\hat{p}(\hat{a}_5) - \hat{p}(\hat{a}_7)\right) \quad , \tag{0.60}$$

et la relation suivante est satisfaite :

$$\hat{p}(\hat{a}_5) + \hat{p}(\hat{a}_7) = \hat{p}(\hat{a}_6) + \hat{p}(\hat{a}_8) = 2\,\hat{p}(\hat{a}_9) \quad . \tag{0.61}$$

Soit $\hat{v}$ une fonction quelconque définie aux points $\hat{a}_i$, $1 \le i \le 4$

La fonction $\hat{P}$-interpolée $\hat{\Pi}\hat{v}$ de $\hat{v}$ est l'unique polynôme de P_1 satisfaisant :

$$\hat{\Pi}\hat{v}(\hat{a}_i) = \frac{1}{2}\left(\hat{v}(\hat{a}_{i-4}) + \hat{v}(\hat{a}_{i-3})\right) \quad , \tag{0.62}$$

pour $5 \le i \le 7$. On a alors :

$$\hat{\Pi}\hat{v}(\hat{a}_8) = \frac{1}{2}\left(\hat{v}(\hat{a}_1) + \hat{v}(\hat{a}_4)\right) \quad . \tag{0.63}$$

Les définitions suivantes sont utiles pour énoncer des résultats d'approximation (majoration de la différence entre une fonction et son interpolée).

On considère les paramètres géométriques suivants associés à un élément fini quelconque, simplicial ou quadrilatéral :

h_K = diamètre de l'élément K (0.64)

ρ_K = sup { diamètres des sphères inscrites dans K } (0.65)

Lorsque l'élément K est un quadrilatère en dimension d'espace égale à deux, on pose

z_K = distance entre les milieux des diagonales de K (0.66)

Définition 0.7 : On dit qu'une famille de triangulations $(\mathcal{C}_h)$ est régulière si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Tous les éléments finis de la triangulation sont équivalents à un seul élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$,

(ii) La quantité

$$h = \max \{ h_K ; K \in \mathcal{C}_h \} \tag{0.67}$$

tend vers zéro

(iii) Dans le cas où tous les éléments $K \in \mathcal{C}_h$ sont soit des n-simplexes, soit des parallélotopes, il existe une constante C telle que

$$\forall h , \forall K \in \mathcal{C}_h , \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq C \tag{0.68}$$

(iii)'Dans le cas où tous les éléments $K \in \mathcal{C}_h$ sont des quadrilatères en dimension $n=2$, il existe deux constantes C et γ telles que

$$\forall h , \forall K \in \mathcal{C}_h , \frac{h_K}{\rho_K} \leq C \text{ et } \max_{1 \leq i \leq 4} |\cos \theta_i| \leq \gamma < 1 , \tag{0.69}$$

où les angles θ_i sont définis sur la figure 0.1.

On a le résultat :

Lemme 0.7 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations d'élément de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ et soient J_K le jacobien de la transformation F_K qui envoie l'élément de référence $\hat{K}$ sur l'élément K, pour $K \in \mathcal{C}_h$ et J_S le jacobien de la restriction de F_K à une $(n-1)$-face quelconque S de K. Les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$c \left(\frac{\rho_K}{h_K} \right)^n \leq J_K \leq C \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right)^n , \tag{0.70}$$

$$\left(\frac{\rho_K}{h_K} \right)^{n-1} \leq J_S \leq \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right)^{n-1} , \tag{0.71}$$

où les constantes c et C telles que $0 < c < C$ sont indépendantes de h

Les résultats de changement de variable suivants sont démontrés dans [6, §2] et dans [5].

Lemme 0.8 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations d'éléments de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$. On suppose la transformation F_K, de jacobien J_K, qui envoie l'élément $\hat{K}$ sur K est affine. Soit une fonction $\hat{u} \in W^{k,q}(\hat{K})$, pour un entier $k \geq 0$ et pour $q \geq 1$

La fonction $u = \hat{u} \circ F_K^{-1}$ appartient à $W^{k,q}(K)$, et on a

$$|\hat{u}|_{k,q,\hat{K}} \leq C (J_K)^{-1/q} (h_K)^k |u|_{k,q,K} , \tag{0.72}$$

$$|u|_{k,q,K} \leq C (J_K)^{1/q} (\rho_K)^{-k} |\hat{u}|_{k,q,\hat{K}} , \tag{0.73}$$

où C désigne une constante indépendante de h.

On a des inégalités analogues en remplaçant K par une (n-1)-face quelconque S de K.

Dans le cas des éléments quadrilatéraux en dimension $n=2$, on a

Lemme 0.9 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, d'élément de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$. On suppose que la transformation F_K, de jacobien J_K qui envoie l'élément $\hat{K}$ sur K est un élément de $(Q_1)^2$. Soit une fonction $\hat{u} \in W^{k,q}(\hat{K})$, pour un entier $k \geq 0$ et pour $q \geq 1$.

La fonction $u = \hat{u} \circ F_K^{-1}$ appartient à $W^{k,q}(K)$ et il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$(0.74) \quad [\hat{u}]_{k,q,\hat{K}} \leq C \left(\inf_{\hat{x} \in \hat{K}} J_K(\hat{x}) \right)^{-1/q} h_K^k \, |u|_{k,q,K}, \quad \text{pour } k \geq 0,$$

$$(0.75) \quad |\hat{u}|_{k,q,\hat{K}} \leq C \left(\inf_{\hat{x} \in \hat{K}} J_K(\hat{x}) \right)^{-1/q} \sum_{\ell=\ell_0}^{k} h_K^{2\ell-k} \rho_K^{k-\ell} \, |u|_{\ell,q,K}, \text{ pour } k \geq 1,$$

où ℓ_0 est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{k}{2}$, et

$$(0.76) \quad |\hat{u}|_{0,q,\hat{K}} \leq C \left(\inf_{\hat{x} \in \hat{K}} J_K(\hat{x}) \right)^{-1/q} |u|_{0,q,K}.$$

Démonstration. Il est facile de voir à partir des formules (0.56) que la transformation F_K est un C^{k+1}-difféomorphisme de $\hat{K}$ sur K, et on a pour une constante C indépendante de h.

$$(0.77) \quad |||DF_K^{-1}|||_{\hat{K}} \leq C h_K^{-1},$$

$$(0.78) \quad |||DF_K|||_{\hat{K}} \leq C h_K,$$

$$(0.79) \quad |||D^2 F_K|||_{\hat{K}} \leq C \rho_K,$$

$$(0.80) \quad |||D^r F_K|||_{\hat{K}} = 0, \quad \text{pour tout entier } r \geq 3,$$

$$(0.81) \quad |[DF_K]|_{\hat{K}} \leq C h_K,$$

$$(0.82) \quad |[D^r F_K]|_{\hat{K}} = 0, \quad \text{pour tout entier } r \geq 2$$

où

$$|||D^r F_K|||_{\hat{K}} = \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \max_{|\alpha|=r} |\partial^\alpha F_K(\hat{x})|, \quad \text{pour tout } r \geq 1,$$

$$|[D^r F_K]|_{\hat{K}} = \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \max_{1 \leq i \leq 2} \left| \frac{\partial^r F_K}{\partial x_i^r}(\hat{x}) \right|, \quad \text{pour tout } r \geq 1.$$

D'après le Lemme 3 de [7], il existe une constante C indépendante de h telle que pour tout $\hat{u} \in W^{k+1,q}(\hat{K})$, on ait :

$$(0.83)\quad |\hat{u}|_{k+1,q,\hat{K}} \leq C\Big(\inf_{\hat{x}\in\hat{K}} J_K(\hat{x})\Big)^{-1/q} \sum_{\ell=1}^{k+1} \Big(|u|_{\ell,q,K} \sum_{\underset{\sim}{j}\in I(k+1,\ell)} |||DF_K|||_{\hat{K}}^{j_1} \cdots |||D^{k+1}F_K|||_{\hat{K}}^{j_{k+1}} \Big),$$

$$(0.84)\quad [\hat{u}]_{k+1,q,\hat{K}} \leq C\Big(\inf_{\hat{x}\in\hat{K}} J_K(\hat{x})\Big)^{-1/q} \sum_{\ell=1}^{k+1} \Big(|u|_{\ell,q,K} \sum_{\underset{\sim}{j}\in I(k+1,\ell)} |[DF_K]|_{\hat{K}}^{j_1} \cdots |[D^{k+1}F_K]|_{\hat{K}}^{j_{k+1}} \Big),$$

où pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq k+1$

$$I(k+1,\ell) = \Big\{ \underset{\sim}{j} = (j_1, \cdots, j_{k+1}),\ j_i \geq 0\ ;\ j_1 + \cdots + j_{k+1} = \ell\ ,\ j_1 + 2j_2 + \cdots + (k+1)j_{k+1} = k+1 \Big\}.$$

Considérons d'abord l'inégalité (0.84). D'après l'égalité (0.82), les termes non nuls de la somme

$$\sum_{\underset{\sim}{j}\in I(k+1,\ell)} |[DF_K]|_{\hat{K}}^{j_1} \cdots |[D^{k+1}F_K]|_{\hat{K}}^{j_{k+1}}$$

sont ceux qui correspondent à un multi indice $\underset{\sim}{j} = (j_1, \cdots, j_{k+1})$ tel que

$$j_i = 0 \qquad \text{pour} \qquad 2 \leq i \leq k+1 \ .$$

D'après la définition de l'ensemble $I(k+1,\ell)$, on a donc

$$j_1 = \ell = k+1$$

L'inégalité (0.74) s'en déduit immédiatement.

D'après l'égalité (0.80), les termes non nuls de la somme

$$\sum_{\underset{\sim}{j}\in I(k+1,\ell)} |||DF_K|||_{\hat{K}}^{j_1} \cdots |||D^{k+1}F_K|||_{\hat{K}}^{j_{k+1}}$$

sont ceux qui correspondent à un multi indice $\underset{\sim}{j} = (j_1, \cdots, j_{k+1})$ tel que

$$j_i = 0 \qquad \text{pour} \qquad 3 \leq i \leq k+1 \ .$$

On a donc nécessairement

$$j_1 = 2\ell - k - 1 \ ,$$

$$j_2 = k+1-\ell \ .$$

La positivité des indices j_1 et j_2 entraîne que l'on doit se limiter aux valeurs de l'entier ℓ supérieures ou égales à ℓ_0 . En utilisant les inégalités (0.78) et (0.79), on obtient immédiatement l'inégalité (0.75).

L'inégalité (0.76) est montrée dans [7]

A partir des Lemmes 0.8 et 0.9, on peut montrer les inégalités suivantes, connues sous le nom d'<u>hypothèses inverses</u> :

<u>Lemme 0.10</u> : <u>Soit</u> $(\mathcal{C}_h)$ <u>une famille régulière de triangulations de</u> Ω . <u>Pour tout élément</u> $K \in \mathcal{C}_h$, <u>on a</u> :

$$(0.86)\quad |p|_{1,q,K} \leq C\,(h_K)^{-1}\,|p|_{0,q,K} \quad , \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathcal{P}_K \ ,$$

$$(0.87)\quad |p|_{0,q,\partial K} \leq C\,(h_K)^{-1/q}\,|p|_{0,q,K} \quad , \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathcal{P}_K \ ,$$

<u>pour tout</u> $q \geq 1$.

Démonstration : On va montrer l'inégalité (0.87), l'inégalité (0.86) étant déjà démontrée dans [6, § 2].

Soient K un élément quelconque de $\mathcal{C}_h$, F_K la transformation qui envoie l'élément de référence $\hat{K}$ sur K et J_K le jacobien de la transformation F_K. La restriction F_S de la transformation F_K à une (n-1)-face quelconque $\hat{S}$ de $\hat{K}$ est affine. D'après le Lemme 0.8, on a donc, pour tout $p \in P_K$:

$$|p|_{0,q,S} \leq C (J_S)^{1/q} |\hat{p}|_{0,q,\hat{S}} ,$$

pour toute face S incluse dans ∂K, où J_S est le jacobien de la transformation F_S et où $\hat{p} = p \circ F_K^{-1} \in \hat{P}$. L'espace $\hat{P}$ étant de dimension finie, on a

$$|\hat{p}|_{0,q,\hat{S}} \leq C |\hat{p}|_{0,q,\hat{K}}$$

la constante C ne dépendant que de q et de $\hat{K}$.

D'après le Lemme 0.9, on a :

$$|\hat{p}|_{0,q,\hat{K}} \leq C \left(\inf_{\hat{x} \in \hat{K}} J_K(\hat{x}) \right)^{-1/q} |p|_{0,q,K} .$$

Les trois dernières inégalités entraînent

$$(0.88) \quad |p|_{0,q,S} \leq C J_S^{1/q} \left(\inf_{\hat{x} \in \hat{K}} J_K(\hat{x}) \right)^{-1/q} |p|_{0,q,K} .$$

En utilisant le Lemme 0.7, on en déduit alors l'inégalité (0.87).

Les résultats d'approximation suivants, dont certains sont démontrés dans [5] et [6], sont utiles pour obtenir les majorations d'erreur, au cours des Chapitres suivants.

Lemme 0.11 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω, en éléments simpliciaux (resp. quadrilatéraux en dimension $n=2$). On suppose que l'inclusion $P_h \subset \hat{P}$ (resp. $Q_h \subset \hat{P}$) est satisfaite, pour un entier $k \geq 1$. Soit un entier s tel que $1 \leq s \leq k+1$ et un nombre $q \geq 1$, avec $\frac{1}{q} - \frac{s}{n} < 0$. A toute fonction $v \in W^{s,q}(\Omega)$, on associe son interpolée $\Pi_h v \in V_h$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on ait, pour tout $v \in W^{s,q}(\Omega)$

$$(0.89) \quad |v - \Pi_h v|_{m,q,K} \leq C h_K^{s-m} |v|_{s,q,K} , \text{ pour } 0 \leq m \leq s ,$$

$$(0.90) \quad |v - \Pi_h v|_{m,q,S} \leq C h_K^{s-m-\frac{1}{q}} |v|_{s,q,K} , \text{ pour } 0 \leq m \leq s-1 ,$$

où S est une face quelconque de l'élément K.

Si de plus les éléments K sont de classe C^0, on a pour tout $K \in \mathcal{C}_h$:

(0.91) $|v - \Pi_h v|_{m,q,S} \leq C\, h_K^{s-m} |v|_{s,q,S}$, $0 \leq m \leq s$,

où S est une face quelconque de K, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$.

Démonstration : L'inégalité (0.89) est démontrée dans [6], et l'inégalité (0.91) se montre de façon analogue. On va démontrer l'inégalité (0.90) dans le cas où la transformation F_K qui envoie l'élément de référence $\hat{K}$ sur K est affine.

D'après le Lemme (0.8), on a :

$$|v - \Pi_h v|_{m,q,S} \leq C (J_S)^{1/q} \rho_K^{-m} |\hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v}|_{m,q,\hat{S}} .$$

Le Lemme 0.3 entraîne l'inégalité :

$$|\hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v}|_{m,q,\hat{S}} \leq C |\hat{v}|_{s,q,\hat{K}} .$$

En revenant à l'élément K, en utilisant le Lemme 0.8, il vient :

$$|v - \Pi_h v|_{m,q,S} \leq C (J_S)^{1/q} (J_K)^{-1/q} \rho_K^{-m} h_K^{s} |v|_{s,q,K} .$$

Cette dernière inégalité et le Lemme 0.7 entraînent l'inégalité (0.90). Lorsque la transformation $F_K \in (Q_1)^2$, dans le cas de la dimension $n = 2$, on procède de la même façon, et on utilise le Lemme 0.9.

En utilisant le Lemme 0.3, on montre de même.

Lemme 0.12 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω. On suppose que l'on a les inclusions $P_k \subset \hat{P}$, dans le cas des éléments simpliciaux, et $Q_k \subset \hat{Q}$, dans le cas des éléments quadrilatéraux, pour un entier $k \geq 1$. Soient s un entier supérieur ou égal à $k+1$, v une fonction de $W^{s,q}(\Omega)$, pour q tel que $\frac{1}{q} - \frac{s}{n} < 0$ et $\Pi_h v \in V_h$ l'interpolée de la fonction v. Pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on a :

$$|v - \Pi_h v|_{m,q,K} \leq C\, h_K^{k+1-m} \sum_{l=k+1}^{s} |v|_{l,q,K} , \quad 0 \leq m \leq k+1 .$$

CHAPITRE I

APPROXIMATION DES SYSTEMES SYMETRIQUES HYPERBOLIQUES PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS CONTINUES ET DISCONTINUES

On considère dans ce Chapitre l'approximation des systèmes de FRIEDRICHS

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0 u = f \quad ,$$

par des méthodes d'éléments finis continues ou discontinues.
Le plan du Chapitre est le suivant :

1) On rappelle le cadre général proposé par FRIEDRICHS et on cite quelques exemples.

2) On définit une méthode du type Galerkin pour trouver une solution approchée u_h dans un espace de dimension finie V_h inclus dans l'espace des fonctions continues. Des hypothèses générales sur l'espace V_h permettent de donner une majoration abstraite de l'erreur.

3) On applique les résultats du paragraphe précédent à différents types d'éléments finis, simpliciaux ou quadrilatéraux, de diamètre $\leq h$, et on donne des exemples. On montre en particulier que si on utilise des polynômes de degré $\leq k$, pour un entier $k \geq 1$, pour construire l'espace des fonctions de forme sur chaque élément, alors l'erreur $|u - u_h|_{L^2(\Omega)}$ entre les solutions exacte u et approchée u_h est d'ordre h^k .

4) On définit une méthode d'éléments finis discontinue permettant de chercher la solution u_h dans un espace de dimension finie W_h , de fonctions non nécessairement continues. On montre que l'erreur $|u - u_h|_{L^2(\Omega)}$ est en $O(h^k)$ lorsqu'on utilise des polynômes de degré $\leq k$ pour construire les fonctions de forme.

5) On applique les résultats du paragraphe précédent aux exemples considérés aux paragraphes 1 et 3 et on expose quelques cas de "superconvergence" : on montre en particulier que l'utilisation de polynômes de degré zéro permet de définir des schémas numériques précis à l'ordre h .

I.1 - LE PROBLEME CONTINU

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière $\partial\Omega$ est continue [35] et une fois continuement différentiable par morceaux (on dira C^1 par morceaux). On notera $\bar{\Omega}$ la fermeture de Ω.

On considère <u>les systèmes symétriques de FRIEDRICHS</u> [13] suivants : Trouver une fonction $u : x \in \Omega \longrightarrow u(x) \in \mathbb{R}^p$ telle que :

$$(1.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0(x)\, u = f \qquad \text{pour} \quad x \in \Omega \ ,$$

$$(1.2) \qquad (B - M)(x)\, u = 0 \qquad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \ ,$$

où $B = \sum_{i=1}^{n} \nu_i A_i$, les ν_i , $1 \le i \le n$ étant les composantes de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Les matrices A_i appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ et sont symétriques, et lipschitziennes en x pour $x \in \bar{\Omega}$, pour $1 \le i \le n$. La matrice $A_0(x)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ et ses coefficients sont bornés dans Ω .
La matrice $M(x)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ et est définie pour $x \in \partial\Omega$. On note M^* <u>la matrice adjointe</u> de M et on suppose que

(I.3) i) $M(x)$ est continue en x pour $x \in \partial\Omega$,

ii) $M(x) + M^*(x) \ge 0$, $\forall x \in \partial\Omega$, *

iii) $\mathrm{Ker}(B - M)(x) + \mathrm{Ker}(B + M)(x) = \mathbb{R}^p$, $\forall x \in \partial\Omega$.

Par la suite, on utilise certaines propriétés de régularité pour les coefficients des matrices A_i , $0 \le i \le n$, et M . On introduit les notations suivantes pour un entier $m \ge 0$:

$$|A_i|_{m,\infty,\Omega} = \max \left\{ |a^i_{jl}|_{m,\infty,\Omega} \ ; \ 1 \le j, l \le p \right\} \ ,$$

où les a^i_{jl} , $1 \le j, l \le p$ sont les coefficients de la matrice A_i , $0 \le i \le n$,

$$|A|_{m,\infty,\Omega} = \max \left\{ |A_i|_{m,\infty,\Omega} \ , \ 1 \le i \le n \right\} \ ,$$

$$\|A\|_{m,\infty,\Omega} = \max \left\{ |A|_{r,\infty,\Omega} \ , \ 0 \le r \le m \right\} \ .$$

De même, on utilise les notations $|M|_{m,\infty,\partial\Omega}$ et $\|M\|_{m,\infty,\partial\Omega}$.

* Soit A une matrice de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$; $A \ge 0$ signifie $(Au, u) \ge 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^p$.

Soit A l'opérateur défini par

$$(I.4) \qquad Au(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + A_0(x)\, u(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in \Omega \ .$$

on dit que l'opérateur A est positif s'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que :

$$(I.5) \qquad C - C_0 I = A_0 + A_0^* - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - C_0 I \geqslant 0 \ , \text{ pour tout } \quad x \in \Omega \ ,$$

où I désigne la matrice identité.

L'opérateur A^* <u>adjoint formel</u> de A est donné par :

$$(I.6) \qquad A^* u(x) = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_i(x)\, u(x) \right) + A_0^*(x)\, u(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in \Omega \ .$$

on dit que v satisfait <u>les conditions aux limites adjointes</u> si :

$$(I.7) \qquad \left(B + M^* \right) v = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \in \partial\Omega \ .$$

Soit $(.,.)$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^p$. On définit $(f,g)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ par $(f,g)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega (f(x), g(x))\, dx$. *

On a les formules de Green suivantes :

<u>Lemme I.1</u> : <u>Pour tout</u> $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, <u>on a</u> :

$$2(Au,u)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (Cu,u)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} (Bu,u)\, ds \ .$$

<u>Lemme I.2</u> : <u>Pour tout</u> $u, v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, <u>on a</u> :

$$(Au,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (u, A^* v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} (Bu,v)\, ds \ .$$

<u>Lemme I.3</u> : <u>Pour tout</u> u (resp. v) <u>appartenant à</u> $\mathbb{H}^1(\Omega)$ <u>et satisfaisant les conditions aux limites</u> (I.2) (resp. (I.7)), <u>on a</u> :

$$(Au,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (u, A^* v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \ .$$

Dans certains exemples (Chapitres III et IV), on utilisera le résultat suivant :

<u>Lemme I.4</u> : <u>Si la matrice</u> B <u>est semi-définie positive (resp. négative) la seule matrice</u> M <u>satisfaisant les hypothèses</u> (I.3) <u>est donnée par</u> :

$$M = B \qquad (\text{resp.} \quad M = -B) \ .$$

<u>Définition I.1</u> : On dit que u appartenant à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est <u>solution faible du problème</u> (I.1), (I.2), si pour tout v appartenant à $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et satisfaisant les conditions aux limites adjointes (I.7), on a :

$$(u, A^* v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (f, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \ .$$

* Par la suite on notera : $\mathbb{L}^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)^p$, $\mathbb{H}^k(\Omega) = \left(H^k(\Omega)\right)^p$, etc.

Le résultat suivant d'existence d'une solution faible est dû à K.O. FRIEDRICHS [13, page 353].

Théorème I.1 : Si l'opérateur A est positif et si les hypothèses (I.3) sont satisfaites, alors pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, il existe une solution faible $u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Remarque I.1 : Le problème de la recherche des solutions faibles admet une solution unique dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. En effet, si $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ est une solution faible du problème, on peut écrire :

$$Au = f \qquad \Omega \ ,$$
$$(B-M)u = 0 \qquad \partial\Omega \ .$$

On peut alors montrer que :

$$|u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{C_0} |f|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \ ,$$

ce qui entraîne l'unicité de la solution.

Définition I.2 : Nous dirons que u est solution forte du problème (I.1), (I.2), s'il existe une suite $\{u_j\}$ de fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, satisfaisant les conditions aux limites (I.2) et telle que :

$$\lim_{j \to +\infty} \left(|u_j - u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + |f - Au_j|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \right) = 0$$

Il existe différents théorèmes pour l'existence d'une solution forte, selon les hypothèses faites sur la frontière $\partial\Omega$, le second membre f , les matrices $B(x)$ et $M(x)$, $x \in \partial\Omega$. Nous citons l'un d'entre eux ([25]). Pour plus de détails, nous renvoyons à K.O. FRIEDRICHS [13, pp. 377-384], P.D. LAX et R.S. PHILLIPS [25, pp. 440-444], R.S. PHILLIPS et L. SARASON [38].

Théorème I.2 : Soit A un opérateur positif. On suppose que la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^2 , que les hypothèses (I.3) sont satisfaites et que le sous-espace $\mathrm{Ker}\,(B(x) - M(x))$ de $\mathbb{R}^p$ est engendré par des vecteurs variant de façon continue avec x pour $x \in \partial\Omega$. Alors pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ le problème (I.1), (I.2) a une solution forte unique.

On donne maintenant quelques exemples de systèmes de FRIEDRICHS. Un exemple important (l'équation du transport) n'est évoqué ici qu'en dimension 1 et sera considéré plus en détail dans le Chapitre III.

Exemple I.1 : Soit $\Omega =]0,1[$. On considère le problème (équation de transport monodimensionnel en symétrie plane ([23]).

$$\text{(I.8)} \qquad \frac{du}{dx} + \sigma u = f \quad \text{pour} \quad x \in]0,1[\ ,$$

$$\text{(I.9)} \qquad u(0) = 0 \ ,$$

où σ est une constante > 0 . L'équation (I.8) peut être considérée comme un

système symétrique de FRIEDRICHS. On a $B(0) = -1$ et $B(1) = 1$.
En appliquant le Lemme I.4, il vient $M(0) = 1 = M(1)$
Soit $(B-M)(0) = -2$ et $(B-M)(1) = 0$
On doit donc imposer une condition aux limites pour $x = 0$ (condition (I.9)) et aucune condition aux limites pour $x=1$. On peut aussi remplacer la condition (I.9) par :

(I.10) $u(0) = g$

Exemple I.2 : Soit $\Omega =]0,1[$. On considère l'équation :

(I.11) $-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f$ pour $x \in]0,1[$,

à laquelle on associe soit des conditions aux limites de Dirichlet :

(I.12) $u(0) = u(1) = 0$,

soit des conditions aux limites de Neuman :

(I.13) $\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0$

On pose $\frac{du}{dx} = v$. L'équation (I.11) peut se mettre sous la forme du système symétrique suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a : $B(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Un choix possible pour les matrices $M(0)$ et $M(1)$, permettant de retrouver les conditions aux limites (I.12) est le suivant :

(I.14) $M(0) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(1) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \geqslant 0$

On a donc :

$$(B-M)(0) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ +2 & 0 \end{pmatrix} , \quad (B-M)(1) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Un choix des matrices $M(0)$ et $M(1)$ permettant de retrouver les conditions aux limites (I.13) est le suivant :

$$M(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(1) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad b \geqslant 0 .$$

On a alors :

$$(B-M)(0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (B-M)(1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -b \end{pmatrix} .$$

Dans les deux cas considérés (conditions (I.11) et (I.12)), on peut remarquer que l'on a :

$$\text{(I.15)} \qquad \mathrm{Ker}\,(B-M) = \mathrm{Ker}\,(B+M^*) \quad \text{pour} \quad x=0 \text{ et } x=1$$

Exemple I.3 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On considère le problème

$$\text{(I.16)} \qquad -\Delta u + u = f \quad \text{pour} \quad x \in \Omega ,$$

$$\text{(I.17)} \qquad u|_{\partial\Omega} = 0 .$$

On pose $\frac{\partial u}{\partial x} = v$, $\frac{\partial u}{\partial y} = w$. L'équation (I.16) peut se mettre sous la forme du système symétrique suivant :

$$\text{(I.18)} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On a $B = \begin{pmatrix} 0 & -n_x & -n_y \\ -n_x & 0 & 0 \\ -n_y & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où n_x et n_y sont les composantes de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Un choix possible pour la matrice M, permettant de retrouver les conditions aux limites (I.17) est le suivant :

$$\text{(I.19)} \qquad M = \begin{pmatrix} a & -n_x & -n_y \\ n_x & 0 & 0 \\ n_y & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \text{avec} \quad a \geqslant 0 .$$

On a encore dans ce cas :

$$\text{(I.20)} \qquad \mathrm{Ker}\,(B-M) = \mathrm{Ker}\,(B+M^*) \qquad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega .$$

Exemple I.4 : Soit $\Omega =]0,1[\times]0,T[$ on considère l'équation de la chaleur en dimension d'espace égale à 1

$$\text{(I.21)} \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f \quad \text{pour} \quad (x,t) \in \Omega ,$$

$$\text{(I.22)} \qquad u_1(0,t) = u_1(1,t) = 0 ,$$

$$\text{(I.23)} \qquad u_1(x,0) = u_0(x) .$$

On pose $v_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}$. On a ainsi le système symétrique :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système symétrique ne satisfait pas les conditions de positivité (1.5). Par contre, si on pose $u_1 = e^{\lambda t} u$ et $v_1 = e^{\lambda t} v$, $\lambda > 0$, le système symétrique obtenu est positif :

$$(1.24) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} f \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On a $B(x,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B(x,T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après le Lemme 1.4, on a donc $M(x,0) = M(x,T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui permet de retrouver le fait que l'on doit se donner une condition initiale. Pour $x = 0$ et $x = 1$, on utilise les matrices données en (1.14).

Exemple 1.5 : Soit $\Omega =]0,1[\times]0,T[$. On considère l'équation des ondes :

$$(1.25) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad (x,t) \in \Omega ,$$

$$(1.26) \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 ,$$

$$(1.27) \quad u(x,0) = u_0(x) ,$$

$$(1.28) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = u_1(x) .$$

On pose $v = e^{-\lambda t} \frac{\partial u}{\partial t}$, $w = e^{-\lambda t} \frac{\partial u}{\partial x}$. On a alors le système symétrique positif (dès que $\lambda > 0$) suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a : $B(x,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(x,T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc

d'après le Lemme 1.4, on a $M(x,0) = M(x,T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On retrouve ainsi les conditions initiales (1.27) et (1.28).
Pour $x=0$ et $x=1$, on utilise les matrices données en (1.14).

I.2 - Approximation du problème (1.1), (1.2) par une méthode de Rayleigh Ritz Galerkin

Dans ce paragraphe, on définit une approximation du problème (1.1), (1.2) de façon abstraite. Pour cela, soit V_h un sous-espace de dimension finie de $(H^1(\Omega))^p$, où h est un paramètre destiné à tendre vers zéro, et soit X_h un sous-espace de V_h. Nous allons chercher une solution approchée $u_h \in X_h$ et montrer que si certaines hypothèses abstraites sont satisfaites, cette solution approchée converge, dans un sens défini plus loin, vers la solution exacte u du problème (1.1), (1.2).

Nous donnerons au paragraphe 3 différents exemples d'espaces V_h, construits à partir des éléments finis décrits au Chapitre 0. L'introduction du sous-espace X_h de V_h peut permettre d'imposer, éventuellement, à la solution approchée u_h de satisfaire certaines conditions aux limites, par exemple :

$$(2.1) \qquad X_h = \left\{ v_h \in V_h \ ; \ \int_{\partial\Omega} \left((B-M) v_h , w_h \right) ds = 0 \ , \ \forall\, w_h \in V_h \right\} .$$

A partir de la définition d'une solution faible du problème (1.1), (1.2) donnée au paragraphe 1, on peut définir de façon naturelle le <u>problème approché</u> suivant :

<u>Trouver</u> $u_h \in X_h$ <u>tel que</u> :

$$(2.2) \qquad \left(u_h , A^* v_h \right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \left(f , v_h \right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ,$$

<u>pour tout</u> $v_h \in X_h^*$, où

$$(2.3) \qquad X_h^* = \left\{ v_h \in V_h \ ; \ \int_{\partial\Omega} \left((B+M^*) v_h , w_h \right) ds = 0 \ , \ \forall\, w_h \in V_h \right\}$$

<u>Remarque 2.1</u> : Le problème (2.2), (2.3) a un sens car les fonctions v_h et w_h appartiennent à $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et on peut définir leurs traces sur $\partial\Omega$ dans le sous-espace $\mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ de $\mathbb{L}^2(\partial\Omega)$ ([33]).

<u>Remarque 2.2</u> : Dans l'égalité (2.2), on ne peut pas nécessairement choisir $v_h = u_h$, car on n'a pas en général l'inclusion

$$X_h \subset X_h^*$$

Le problème 2.2 conduit en général à la résolution d'un système linéaire pour lequel le nombre d'inconnues n'est pas égal au nombre d'équations. Il est alors difficile de montrer que le problème (2.2) est V_h-elliptique et de prouver l'existence d'une solution approchée .

Nous allons donc définir un problème approché pour lequel on cherche la solution u_h dans le même espace que les fonctions v_h, ce qui nécessite un traitement particulier des conditions aux limites.

On utilise pour cela le résultat suivant, conséquence directe des Lemmes 1.2 et 1.3.

Lemme 2.1 : Si $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ est la solution du problème (1.1), (1.2), alors on peut écrire pour tout $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$:

$$(2.4)\quad \frac{1}{2}\left((Au,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (u,A^*v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(Mu,v)\,ds = (f,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

De façon équivalente, on peut écrire pour tout $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$:

$$(2.5)\quad (Au,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}((M-B)u,v)\,ds = (f,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\ ,$$

et

$$(2.6)\quad (u,A^*v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(u,(B+M^*)v)\,ds = (f,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\ .$$

Remarque 2.3 : Pour ces trois formulations équivalentes, les fonctions u et v appartiennent au même espace, mais des termes de bord apparaissent dans les équations.

A partir du Lemme 2.1, on définit le problème approché:

Trouver $u_h \in X_h$ tel que

$$(2.7)\quad \frac{1}{2}\left((Au_h,v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (u_h,A^*v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(Mu_h,v_h)\,ds = (f,v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

pour tout

On a le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.1 : Le problème approché (2.7) a une solution unique $u_h \in X_h$ et on a la majoration :

$$(2.8)\quad |u_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \frac{2}{C_0}\,|f|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\ .$$

Démonstration : Dans l'égalité (2.7), on peut choisir $v_h = u_h$. En utilisant le Lemme 1.1 et la positivité de l'opérateur A, il vient :

$$\frac{C_0}{2}\,|u_h|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(Mu_h,u_h)\,ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left((A+A^*)u_h,u_h\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(Mu_h,u_h)\,ds = (f,u_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

D'après les hypothèses (1.3), on a :

$$\int_{\partial\Omega} (M u_h, u_h)\, ds = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left((M+M^*) u_h, u_h\right) ds \geq 0$$

On déduit de ces inégalités l'existence d'une solution unique satisfaisant l'inégalité (2.8).

On considère maintenant le problème de la convergence de la solution approchée vers la solution exacte :
Soit l'espace :

$$(2.9) \qquad W^* = \left\{ v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \; ; \; (B+M^*) v|_{\partial\Omega} = 0 \right\} .$$

On fait l'hypothèse suivante sur le sous-espace X_h de $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Il existe un sous-espace $\mathcal{Y}^*$ de W^*, dense dans W^*
et une application $r_h : \mathcal{Y}^* \longrightarrow X_h$ telle que

$$(2.10) \qquad \lim_{h\to 0} \| v - r_h v \|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = 0 \quad ,$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\sup_{w_h \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |v - r_h v||w_h|\, ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \right) = 0$$

On a ([24]) :

Théorème 2.2 : On suppose que le second membre ℓ appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et que l'hypothèse (2.10) est satisfaite. Soit $u_h \in X_h$ la solution du problème approché (2.7). Alors de la suite (u_h), on peut extraire une sous-suite $(u_{h'})$ qui converge faiblement dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ vers une solution u du problème faible.

Démonstration : En utilisant le Lemme 1.2, l'égalité (2.7) peut s'écrire :

$$(2.11) \qquad (u_h, A^* v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \left(u_h, \frac{B+M^*}{2} v_h \right) ds = (\ell, v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad , \quad \forall v_h \in X_h$$

Soit v une fonction de $\mathcal{Y}^*$ et soit $r_h v \in X_h$, où l'application r_h est définie en (2.10). D'après l'hypothèse (2.10), on a :

$$(2.12) \qquad \lim_{h\to 0} (v - r_h v) = 0 \qquad \text{fortement dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \quad ,$$

$$(2.13) \qquad \lim_{h\to 0} (A^* v - A^* r_h v) = 0 \qquad \text{fortement dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \quad ,$$

$$(2.14) \qquad \lim_{h\to 0} \sup_{w_h \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |v - r_h v||w_h|\, ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} = 0 \quad .$$

D'autre part on peut écrire :

$$(2.15)\quad \left| \int_{\partial\Omega} (u_h, (B+M^*) r_h v)\, ds \right| = \left| \int_{\partial\Omega} (u_h, (B+M^*)(r_h v - v))\, ds \right| \leq$$

$$\leq C \left(\sup_{w_h \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |v - r_h v|\, |w_h|\, ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \right) |u_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ,$$

où $C = C(\|B\|_{0,\infty,\partial\Omega}, \|M\|_{0,\infty,\partial\Omega})$ ne dépend pas de h .

D'après le théorème 2.1, la suite (u_h) est bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, uniformément en h . On peut donc en extraire une suite $(u_{h'})$ qui converge faiblement dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ vers un élément u de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Lorsque h' tend vers zéro, on peut écrire en utilisant les relations (2.11) à (2.15) :

$$(u, A^* v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (f, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \text{pour tout} \quad v \in \mathcal{Y}^* ,$$

et puisque $\mathcal{Y}^*$ est dense dans W^*

$$(u, A^* v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (f, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \text{pour tout} \quad v \in W^*$$

L'élément u est donc une solution faible du problème (1.1), (1.2).

Remarque 2.1 : On verra dans les exemples que l'hypothèse (2.10) peut être satisfaite lorsque l'espace X_h est identique à l'espace V_h, c'est-à-dire que l'on n'impose a priori à la solution approchée u_h aucune condition aux limites. Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas satisfaite, en général lorsque l'espace X_h est différent de l'espace V_h .

Soit l'espace :

$$(2.16)\quad W = \left\{ v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \; ; \; (B-M) v|_{\partial\Omega} = 0 \right\} .$$

On fait l'hypothèse suivante sur le sous-espace X_h de $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

$$(2.17)\quad \begin{cases} \text{Il existe un sous-espace } \mathcal{Y} \text{ de } W \text{ , dense dans } W \\ \text{et une application } r_h : \mathcal{Y} \longrightarrow X_h \text{ telle que} \\ \lim_{h \to 0} \|v - r_h v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = 0 , \\ \lim_{h \to 0} \left(\sup_{w_h \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |v - r_h v|\, |w_h|\, ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \right) = 0 . \end{cases}$$

On a ([24]).

Théorème 2.3 : Soient u la solution forte (au sens de la définition 1.2) du problème (1.1), (1.2) et $u_h \in X_h$ la solution du problème approché (2.7). On suppose que l'hypothèse (2.17) est satisfaite. Alors la suite (u_h) converge fortement vers u dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ lorsque h tend vers zéro.

Démonstration : On considère l'expression suivante, définie pour tout $v_h \in X_h$

$$E_h = \frac{1}{2}\left((A+A^*)(u_h - v_h), u_h - v_h\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \left(M(u_h - v_h), u_h - v_h\right) ds \quad .$$

D'après les Lemmes 1.1 et 1.2 et les hypothèses (1.3), on a :

$$E_h = \frac{1}{2}\left(C(u_h - v_h), u_h - v_h\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(M(u_h - v_h), u_h - v_h\right) ds$$

donc :

$$(2.18) \qquad E_h \geq \frac{c_0}{2} |u_h - v_h|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad .$$

D'après la définition du problème approché (2.7) et le Lemme 1.2, on a :

$$E_h = (f, u_h - v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (Av_h, u_h - v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}((B-M)v_h, u_h - v_h) ds .$$

Pour tout $v \in W$ on peut écrire :

$$(2.19) \quad E_h = (f - Av, u_h - v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (A(v - v_h), u_h - v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}((B-M)(v_h - v), u_h - v_h) ds.$$

En utilisant l'inégalité (2.18), il vient, pour tout $v \in W$

$$(2.20) \quad |u_h - v|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c\left\{|f - Av|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|v - v_h\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \sup_{w_h \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |v - v_h||w_h| ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}\right\} .$$

On considère maintenant l'inégalité (2.20) pour $v \in \mathcal{V}$; on choisit $v_h = r_h v$. On a, lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h \to 0} |u_h - v|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c\,|f - Av|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \quad ,$$

et puisque $\mathcal{V}$ est dense dans W

$$(2.21) \quad \lim_{h \to 0} |u_h - v|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c\,|f - Av|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in W \quad .$$

L'égalité (2.21) est valable pour les fonctions u_j de la définition (1.2) et il vient, pour tout indice j :

$$\lim_{h \to 0} |u_h - u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c\left(|u - u_j|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + |f - Au_j|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) .$$

En prenant la limite du membre de droite lorsque j tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{h \to 0} |u_h - u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0 \quad .$$

Remarque 2.2 : Dans les exemples donnés plus loin, l'hypothèse (2.17) sera toujours satisfaite, car l'espace X_h sera soit l'espace V_h tout entier, soit un sous-espace de V_h composé de fonctions satisfaisant approximativement les conditions aux limites (1.2).

On peut donner la majoration générale de l'erreur suivante

Théorème 2.4 : Soient $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ la solution forte du problème (1.1), (1.2) et $u_h \in X_h$ la solution du problème approché (2.7). On a alors :

$$(2.22)\quad |u-u_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in X_h} \left\{ \|u-v_h\|_{1,2,\Omega} + \sup_{w_h \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |u-v_h||w_h|\,ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \right\},$$

où C est une constante indépendante de h

Démonstration : D'après l'inégalité (2.20), on a :

$$|u_h-v|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left\{ |g-Av|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|v-v_h\|_{1,2,\Omega} + \sup_{w_h \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |v-v_h||w_h|\,ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \right\},$$

pour tout $v \in W$

Dans l'inégalité précédente, on peut choisir $v = u$. Il vient

$$|u-u_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left\{ \|u-v_h\|_{1,2,\Omega} + \sup_{w_h \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |u-v_h||w_h|\,ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \right\},$$

pour tout $v_h \in X_h$.

On en déduit aisément l'inégalité (2.22).

I.3 - Application aux éléments finis

Dans ce paragraphe, on applique les résultats du paragraphe précédent lorsque l'espace de dimension finie V_h est construit à partir des éléments finis décrits au Chapitre 0.

On vérifie que les hypothèses de convergence (2.10) et (2.17) peuvent être satisfaites et on donne une majoration de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée.

On considère ensuite quelques exemples.

Nous supposerons ici que l'ouvert Ω est polyédrique, mais les résultats donnés ici peuvent s'étendre au cas d'un ouvert quelconque en utilisant les mêmes techniques (éléments finis isoparamétriques courbes) que dans [5], [7], [8].

Soit $\mathcal{C}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ en éléments finis K de diamètre inférieurs ou égaux à h. Les éléments finis considérés ici sont les éléments introduits au Chapitre 0. (Exemple 0.1, éléments simpliciaux et exemple 0.2, éléments quadrilatéraux : parallélotopes en dimension quelconque d'espace et quadrilatères quelconques en dimension $n=2$). Les méthodes définies ici peuvent être étendues au cas des éléments finis du type Hermite comme dans [6].

On supposera que tous les éléments K de la triangulation sont les images par des transformations affines (ou appartenant à $(Q_1)^2$ dans le cas de la dimension $n=2$) d'un élément fini de référence $\hat{K}$

L'espace V_h est défini comme en (0.45) et on a l'inclusion

$$V_h \subset \left(H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})\right)^p \quad . \tag{3.1}$$

L'espace X_h peut être défini de l'une des deux façons suivantes

$$X_h^1 = V_h \quad , \tag{3.2}$$

$$X_h^2 = \left\{ v_h \in V_h \; ; (B-M)v_h = 0 \text{ aux noeuds appartenant à } \partial\Omega \right\}. \tag{3.3}$$

Les fonctions v_h de l'espace X_h^2 satisfont donc de façon discrète la condition aux limites (1.2). D'autre part, il est facile de construire une base de l'espace X_h^2, de façon locale.

De plus, lorsque la matrice B-M a ses coefficients constants le long des faces incluses dans la frontière $\partial\Omega$, on a :

$$\int_{\partial\Omega} \left((B-M)v_h, w_h\right) ds = 0 \quad , \quad \text{pour tout } v_h \in X_h^2 \, , \; w_h \in V_h \, , \tag{3.4}$$

et l'espace X_h^2 est inclus dans l'espace X_h défini en (2.1).

On considère le problème approché (2.7) que l'on écrit à nouveau ici pour plus de clarté :

Trouver $u_h \in X_h$ tel que, pour tout $v_h \in X_h$, on ait :

$$(3.5)\quad \frac{1}{2}\left((Au_h, v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (u_h, A^* v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (Mu_h, v_h)\, ds = (f, v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

où X_h est l'un des deux espaces X_h^i, $i = 1, 2$, définis plus haut.

Remarque 3.1 : Lorsque $X_h = X_h^1 = V_h$, la formulation (3.5) du problème approché conduit à un traitement implicite des conditions aux limites. On utilise en fait ici une méthode d'éléments finis discontinue (voir au paragraphe 4 la définition des méthodes discontinues) le long de la frontière $\partial\Omega$ la valeur de la solution approchée u_h le long de $\partial\Omega$, à l'intérieur de Ω, ne satisfaisant pas nécessairement les conditions aux limites (1.2).

On a le théorème suivant :

Théorème 3.1 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω. On suppose que dans le cas des éléments simpliciaux (resp. quadrilatéraux) on a l'inclusion $P_k \subset \hat{P}$ (resp. $Q_k \subset \hat{P}$) pour un entier $k \geq 1$. On suppose que le second membre f appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Alors on a les résultats suivants :

(i) La solution unique $u_h \in X_h$ du problème (3.5) satisfait l'inégalité

$$(3.6)\quad |u_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \frac{2}{C_0} |f|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

(ii) Lorsque $X_h = X_h^1$, de la suite (u_h), on peut extraire une sous suite $(u_{h'})$ qui converge faiblement dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ lorsque h' tend vers zéro, vers une solution faible u du problème (1.1), (1.2).

(iii) On suppose maintenant que u est la solution forte du problème (1.1), (1.2). Alors si $X_h = X_h^1$ ou X_h^2, la suite (u_h) converge fortement dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, lorsque h tend vers zéro, vers la solution forte u du problème (1.1), (1.2).

Démonstration : L'inégalité (3.6) n'est pas autre chose que l'inégalité (2.8) du théorème 2.1. Pour montrer les convergences faibles et fortes, il suffit de vérifier que les hypothèses (2.10) et 2.17) sont satisfaites.
Soient donc W^X et W les espaces définis respectivement par :

$$(3.7)\quad W^* = \left\{ v \in \mathbb{H}^1(\Omega)\ ;\ (B+M^*)v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}\ ,$$

$$(3.8)\quad W = \left\{ v \in \mathbb{H}^1(\Omega)\ ;\ (B-M)v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}\ ,$$

et soient $\mathcal{Y}^*$ et $\mathcal{Y}$ les espaces définis respectivement par

$$(3.9)\quad \mathcal{Y}^* = \left\{ v \in \mathbb{H}^2(\Omega)\ ;\ (B+M^*)v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}\ ,$$

$$(3.10)\quad \mathcal{Y} = \left\{ v \in \mathbb{H}^2(\Omega)\ ;\ (B-M)v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}\ .$$

Si la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^2 et si les sous-espaces $\mathrm{Ker}(B(x)-M(x))$ et $\mathrm{Ker}(B(x)+M^*(x))$ inclus dans $\mathbb{R}^n$ sont engendrés par des vecteurs dont les composantes, définies pour $x \in \partial\Omega$, sont deux fois continûment différentiables sur $\partial\Omega$, on peut montrer en raisonnant par cartes locales comme dans [35, Chapitre I], ou dans [25, p. 431] que l'espace $\mathcal{Y}^*$ (resp. $\mathcal{Y}$) est dense dans W^* (resp. W). Ces résultats de densité peuvent s'étendre ([38, pp. 237-241]) au cas où le domaine Ω est polyédrique.

On suppose maintenant que l'on a $n \leq 3$, de telle sorte que l'inclusion

$$(3.11)\quad H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$$

est satisfaite. Soit $\Pi_h : \mathbb{H}^2(\Omega) \longrightarrow X_h$, l'opérateur d'interpolation défini au Chapitre 0. En appliquant le Lemme 0.11, inégalité (0.89), on peut écrire :

$$(3.12)\quad \|v - \Pi_h v\|_{1,2,\Omega} \leq c\,h\,|v|_{2,2,\Omega} \qquad \text{pour tout } v \in \mathbb{H}^2(\Omega),$$

D'après les Lemmes 0.10 (inégalité 0.87) et 0.11 (inégalité 0.90) on a

$$\int_{\partial\Omega} |w_h|\,|v - \Pi_h v|\,ds \leq c\,h\,|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,|v|_{2,2,\Omega}$$

pour tout $w_h \in V_h$ et tout $v \in \mathbb{H}^2(\Omega)$, donc

$$(3.13)\quad \sup_{w_h \in V_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |w_h|\,|\Pi_h v - v|\,ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \leq c\,h\,|v|_{2,2,\Omega}\ ,$$

pour tout $v \in \mathbb{H}^2(\Omega)$

L'hypothèse (2.10) est donc satisfaite en définissant $\mathcal{Y}^*$ comme en (3.9) et en choisissant pour application γ_h l'opérateur Π_h

Pour tout $v \in \mathcal{Y}$, on a :

$$\Pi_h v \in X_h^2 \subset X_h^1 = V_h$$

Les inégalités (3.12) et (3.13) sont valables pour tout $v \in \mathcal{V}$ et l'hypothèse (2.17) est donc satisfaite dans les deux cas, $X_h = V_h$ et $X_h = X_h^2$ en choisissant $r_h \equiv \Pi_h$.

Lorsque la dimension n est supérieure ou égale à 4, les résultats précédents sont encore valables, en remplaçant l'opérateur d'interpolation Π_h par un opérateur $\widetilde{\Pi}_h$ convenable, construit en utilisant un procédé de régularisation (Ph. CLEMENT [10]) et en supposant que l'on a l'inégalité, pour une constante indépendante de la triangulation

$$\frac{h}{\rho} \leq C \quad , \qquad \text{où} \tag{3.14}$$

$$\rho = \inf \{ \rho_K \; ; \; K \in \mathcal{C}_h \} \quad , \tag{3.15}$$

$$h = \sup \{ h_K \; ; \; K \in \mathcal{C}_h \} \quad . \tag{3.16}$$

Remarque 3.2 : Le résultat de convergence faible est encore valable pour $X_h = X_h^2$, lorsque l'égalité suivante est satisfaite

$$\mathrm{Ker}\,(B-M) = \mathrm{Ker}\,(B+M^*) \quad .$$

En effet, dans ce cas, l'interpolée $\Pi_h v$ d'une fonction quelconque v de $\mathcal{V}^*$ appartient à l'espace X_h^2 .

On a la majoration d'erreur suivante.

Théorème 3.2 : On suppose que les hypothèses du Théorème 3.1 sont satisfaites pour un entier $k \geq 1$ et que la solution u appartient à $\mathbb{H}^{s+1}(\Omega)$, pour un entier s tel que $1 \leq s \leq k$, et $\frac{n}{2} - 1 < s$. On a alors pour $X_h = X_h^1$ ou X_h^2

$$|u - u_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\, h^s\, |u|_{s+1,2,\Omega} \quad , \tag{3.17}$$

où C est une constante indépendante de h .

Démonstration : Soient $u \in \mathbb{H}^{s+1}(\Omega)$ et $\Pi_h u \in V_h$ son interpolée. Puisque la fonction u vérifie les conditions aux limites (1.2), on a

$$\Pi_h u \in X_h^2 \subset X_h^1 = V_h$$

D'après le théorème 2.4 on peut écrire :

$$|u - u_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \left\{ \|u - \Pi_h u\|_{1,2,\Omega} + \sup_{w_h \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |u - \Pi_h u|\, |w_h|\, ds}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \right\} .$$

D'après le Lemme 0.11, on a :

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,2,\Omega} \leq C\, h^s\, |u|_{s+1,2,\Omega} \quad .$$

D'après les Lemmes 0.10 et 0.11, on a :

$$\left| \int_{\partial\Omega} |u - \Pi_h u| |w_h| \, ds \right| \leq C h^{\sigma} |u|_{\sigma+1,2,\Omega} |w_h|_{L^2(\Omega)} ,$$

pour tout $w_h \in V_h$.

Les trois dernières inégalités entraînent la majoration (3.17).

Remarque 3.3 : Lorsque l'on a l'inégalité $k \leq \frac{n}{2} - 1$, la majoration (3.17) est encore valable, l'opérateur d'interpolation Π_h étant remplacé par un opérateur $\tilde{\Pi}_h$ convenable, comme à la fin de la démonstration du Théorème 3.1, et en supposant que l'inégalité (3.14) est satisfaite. On peut aussi obtenir une majoration analogue à l'inégalité (3.17) si on suppose que la solution $u \in W^{\sigma+1,q}(\Omega)$, pour un entier σ et un nombre q tels que $1 \leq \sigma \leq k+1$ et $n - q(\sigma+1) < 0$. On a alors :

$$(3.18) \qquad |u - u_h|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{\sigma} |u|_{\sigma+1,q,\Omega} .$$

Remarque 3.4 : Le Théorème précédent montre que lorsqu'on utilise des polynômes de degré $\leq k$, on peut obtenir une précision en $O(h^k)$. Nous verrons au paragraphe 4 que la majoration (3.17) peut être améliorée dans le cas où le domaine Ω est un parallélotope triangulé en parallélotopes égaux et où on choisit $\hat{P} = Q_1$. On a alors une erreur en $O(h^{3/2})$ et même dans certains cas en $O(h^2)$.

Pour résoudre le problème (3.5), il faut inverser un système linéaire dont le nombre d'équations est égal à p fois le nombre de noeuds de la triangulation, ou p est la dimension du vecteur solution u. Les coefficients de la matrice du système sont des intégrales sur tout ou une partie du domaine Ω , qui seront calculées en utilisant des formules de quadrature approchée (voir Chapitre II) par l'ordinateur. Dans certains cas simples, nous allons cependant écrire explicitement les systèmes linéaires obtenus.

Exemple 3.1 : On reprend le problème décrit dans l'exemple 1.1.

On considère le découpage suivant de l'intervalle

$$(3.19) \qquad 0 = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_I = 1 .$$

Soit V_h l'espace des fonctions continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq I-1$, est un polynôme de P_k.

L'espace X_h^1 est l'espace des fonctions de V_h nulles pour $x = x_0$

On résout les problèmes approchés suivants :

Trouver $u_h \in X_h^1 = V_h$ tel que :

$$(3.20) \qquad \int_0^1 \left(\frac{du_h}{dx} + \sigma u_h - f \right) v_h \, dx + u_h(0) v_h(0) = 0$$

pour tout $v_h \in V_h$.

Trouver $u_h \in X_h^2$ tel que :

$$(3.21)\quad \int_0^1 \left(\frac{du_h}{dx} + \sigma u_h - f\right) v_h \, dx = 0 \qquad \text{pour tout } v_h \in X_h^2$$

Dans les deux cas, on a la majoration d'erreur

$$(3.22)\quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} \leq C h^k |u|_{k+1,2,\Omega} \,,$$

où $h = \sup \{ x_{j+1} - x_j \,;\ 0 \leq j \leq I-1 \}$.

Lorsque $k=1$ les problèmes (3.20) et (3.21) s'écrivent respectivement :

$$(3.23)\quad \begin{cases} \dfrac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} + \sigma \dfrac{2u_0}{3} + \dfrac{u_1}{3} + \dfrac{2u_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{2}{x_1 - x_0} \displaystyle\int_0^{x_1} f v_0 \, dx \\ u_{j+1} - u_{j-1} + \sigma \left(\dfrac{x_{j+1} - x_j}{3} (2u_j + u_{j+1}) + \dfrac{x_j - x_{j-1}}{3} (2u_j + u_{j-1}) \right) = \displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f v_j \, dx \\ \text{pour } 1 \leq j \leq I-1 \,, \\ \dfrac{u_I - u_{I-1}}{x_I - x_{I-1}} + \sigma \left(\dfrac{2u_I}{3} + \dfrac{u_{I-1}}{3} \right) = \dfrac{2}{x_I - x_{I-1}} \displaystyle\int_{x_{I-1}}^{x_I} f v_I \, dx \end{cases}$$

et

$$(3.24)\quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{j+1} - u_{j-1} + \sigma \left(\dfrac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3} (2u_j + u_{j+1}) + \dfrac{x_j - x_{j-1}}{3} (2u_j + u_{j-1}) \right) = \\ \qquad = \displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f v_j \, dx \qquad\qquad 1 \leq j \leq I-1 \\ \dfrac{u_I - u_{I-1}}{x_I - x_{I-1}} + \sigma \left(\dfrac{2u_I}{3} + \dfrac{u_{I-1}}{3} \right) = \dfrac{2}{x_I - x_{I-1}} \displaystyle\int_{x_{I-1}}^{x_I} f v_I \, dx \end{cases}$$

où $u_j = u_h(x_j)$ et où v_j désigne la fonction de V_h égale à 1 au point x_j et à zéro aux points x_i , $i \neq j$, pour $0 \leq j \leq I$.

Dans le cas où $x_{j+1} - x_j = h$, pour $0 \leq j \leq I-1$, le schéma 3.23 s'écrit

$$(3.25)\quad \begin{cases} \dfrac{u_1 - u_0}{h} + \sigma\left(\dfrac{2u_0}{3} + \dfrac{u_1}{3}\right) + \dfrac{2u_0}{h} = \dfrac{2}{h}\displaystyle\int_0^h f v_0 \, dx \\ u_{j+1} - u_{j-1} + \dfrac{\sigma h}{3}\left(u_{j+1} + 4u_j + u_{j-1}\right) = \displaystyle\int_{(j-1)h}^{(j+1)h} f v_j \, dx \ , \ 1 \leq j \leq I-1 \\ u_I - u_{I-1} + \sigma h\left(\dfrac{2u_I}{3} + \dfrac{u_{I-1}}{3}\right) = 2\displaystyle\int_{1-h}^{h} f v_I \, dx \end{cases}$$

Le schéma (3.24) se transforme alors en le schéma (3.26) qui s'obtient en remplaçant dans le schéma (3.25) la première équation par :

$$u_0 = 0$$

On montrera, au Chapitre II, que pour les deux schémas (3.25) et (3.26), on a l'erreur suivante :

$$(3.27)\quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} = O(h^2) \ .$$

Pour obtenir la solution u_h aux différents noeuds, il est nécessaire de résoudre un système linéaire dont la matrice est $(2k+1)$-diagonale. Nous verrons au Chapitre III qu'il est possible de définir, pour ce type d'équations, des problèmes approchés conduisant à des systèmes linéaires dont la matrice est triangulaire par blocs, la résolution du système s'effectuant alors bloc par bloc.

Exemple 3.2 : On considère la problème (1.10), (1.11) décrit dans l'exemple 1.2 et on utilise pour l'intervalle $[0,1]$ le découpage (3.19), avec $x_j = jh$, $0 \leq j \leq I$. L'espace V_h est l'espace des fonctions vectorielles (φ_h, ψ_h) tel que chaque composante appartient à l'espace des fonctions continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq I-1$ est un polynôme de P_k .
L'espace X_h^2 est défini par :

$$(3.28)\quad X_h^2 = \left\{ (\varphi_h, \psi_h) \in V_h \ ; \ \varphi_h(0) = \varphi_h(1) = 0 \right\} \ .$$

On résout les problèmes approchés suivants :
Trouver $(u_h, v_h) \in X_h^1 = V_h$ tel que :

$$(3.29)\quad \int_0^1 \left(\left(-\frac{dv_h}{dx} + u_h - f\right)\varphi_h + \left(-\frac{du_h}{dx} + v_h\right)\psi_h \right) dx +$$
$$+ u_h(0)\left(-\frac{\sigma}{2}\varphi_h(0) + \psi_h(0)\right) + u_h(1)\left(\frac{\sigma}{2}\varphi_h(1) + \psi_h(1)\right) = 0$$

pour tout $(\varphi_h, \psi_h) \in V_h$.
Trouver $(u_h, v_h) \in X_h^2$ tel que :

$$(3.30)\quad \int_0^1 \left(\left(-\frac{dv_h}{dx} + u_h - f \right) \varphi_h + \left(-\frac{du_h}{dx} + v_h \right) \psi_h \right) dx = 0$$

pour tout $(\varphi_h, \psi_h) \in X_h^2$.
Pour les problèmes (3.29) et (3.30), on a la majoration d'erreur :

$$(3.31)\quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} + \left| \frac{du}{dx} - v_h \right|_{L^2(0,1)} \leq c h^k \| u \|_{H^{k+2}(0,1)} .$$

Pour $k=1$, on montrera, au Chapitre II, que l'on a

$$(3.32)\quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} + \left| \frac{du}{dx} - v_h \right|_{L^2(0,1)} \leq c h^{3/2} \| u \|_{H^4(0,1)} .$$

Les problèmes (3.29) et (3.30) conduisent à la résolution de systèmes linéaires ayant respectivement $2(Ik+1)$ et $2Ik$ inconnues.
La solution (u_h, v_h) du problème (3.30) satisfait de façon exacte les conditions aux limites

$$(3.33)\quad u_h(0) = u_h(1) = 0$$

Lorsque $k = 1$, le problème (3.29) s'écrit

$$(3.34)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}(u_0 + u_1) + h\left(\frac{v_0}{3} + \frac{v_1}{6}\right) = 0 \\ -(v_1 - v_0) + h\left(\frac{2u_0}{3} + \frac{u_1}{3}\right) = 2\int_0^h f \varphi_0 \, dx \\ \frac{1}{2}(u_I + u_{I-1}) + h\left(\frac{v_I}{3} + \frac{v_{I-1}}{6}\right) = 0 \\ -(v_I - v_{I-1}) + h\left(\frac{2u_I}{3} + \frac{u_{I-1}}{3}\right) = 2\int_{1-h}^1 f \varphi_I \, dx \\ -(v_{i+1} - v_{i-1}) + \frac{h}{3}(u_{i+1} + 4u_i + u_{i-1}) = 2\int_0^1 f \varphi_i \quad , 1 \leq i \leq I-1 , \\ -(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{h}{3}(v_{i+1} + 4v_i + v_{i-1}) = 0 \quad , 1 \leq i \leq I-1 , \end{cases}$$

où $(u_i, v_i) = \left(u_h(x_i), v_h(x_i)\right)$, $0 \le i \le I$ et où φ_i désigne la fonction égale à 1 pour $x = x_i$ et à zéro pour $x = x_j$ pour $j \neq i$, $0 \le i \le I$.

Pour $h = 1$, le problème (3.30) est équivalent au système linéaire (3.34), dans lequel on remplace la première et la troisième équation par

$$u_0 = u_I = 0 \quad .$$

Exemple 3.3 : On considère le problème donné dans l'exemple 1.3. On découpe le domaine $\bar{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$ en rectangles de côtés $\Delta x = \frac{1}{I}$ et $\Delta y = \frac{1}{J}$. On pose

$$x_i = i\Delta x \quad , \quad y_j = j\Delta y \quad , \quad A_{ij} = (x_i, y_j) \quad ,$$

$$u_h(A_{ij}) = u_{ij} \quad , \quad \text{pour} \quad 0 \le i, j \le I, J \quad .$$

Soit V_h l'espace des fonctions vectorielles $(\varphi_h, \psi_h, \eta_h)$ telles que chaque composante soit une fonction continue dont la restriction à chaque rectangle est un polynôme de Q_h .

L'espace X_h^2 sera défini par

$$(3.35) \qquad X_h^2 = \left\{ (\varphi_h, \psi_h, \eta_h) \in V_h \; ; \; \varphi_h|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \quad ,$$

correspondant au choix suivant de la matrice M le long de $\partial\Omega$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On résout les problèmes approchés suivants.

Trouver $(u_h, v_h, w_h) \in V_h$ tels que :

$$(3.36) \qquad \int_\Omega \left(\left(-\frac{\partial v_h}{\partial x} - \frac{\partial w_h}{\partial y} + u_h - f \right) \varphi_h + \left(-\frac{\partial u_h}{\partial x} + v_h \right) \varphi_h + \left(-\frac{\partial u_h}{\partial y} + w_h \right) \eta_h \right) dx dy$$

$$+ \int_0^1 \left(-(u_h \psi_h)(0,y) + (u_h \psi_h)(1,y) \right) dy + \int_0^1 \left(-(u_h \psi_h)(x,0) + (u_h \psi_h)(x,1) \right) dx = 0$$

pour tout $(\varphi_h, \psi_h, \eta_h) \in V_h$.

Trouver $(u_h, v_h, w_h) \in X_h^2$ tels que :

$$(3.37) \qquad \int_\Omega \left(\left(-\frac{\partial v_h}{\partial x} - \frac{\partial w_h}{\partial y} + u_h - f \right) \varphi_h + \left(-\frac{\partial u_h}{\partial x} + v_h \right) \psi_h + \left(-\frac{\partial u_h}{\partial y} + w_h \right) \eta_h \right) dx dy = 0$$

Pour tout $(\varphi_h, \psi_h, \eta_h) \in X_h^2$.

Pour ces deux problèmes, on a la majoration d'erreur suivante

$$(3.38)\qquad |u-u_h|_{L^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial u}{\partial x} - v_h\right|_{L^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial u}{\partial y} - w_h\right|_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$\leq C h^k \|u\|_{k+2,2,\Omega}$$

et lorsque $k=1$, on montrera au Chapitre II que l'on a

$$(3.39)\quad |u-u_h|_{L^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial u}{\partial x} - v_h\right|_{L^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial u}{\partial y} - v_h\right|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{3/2} \begin{cases} \|u\|_{4,2,\Omega} + \|u\|_{3,\infty,\Omega} & \text{pour le problème (3.36)} \\ \|u\|_{4,2,\Omega} & \text{pour le problème (3.37)} \end{cases}$$

Lorsque $k=1$, nous allons écrire le système linéaire correspondant au problème (3.37), dans le cas où on calcule les intégrales de façon approchée sur chaque rectangle, par la formule

$$\int_K f\,dx\,dy = \frac{\text{aire } K}{4} \sum_{i=1}^{4} f(a_i) \quad ,$$

où les points a_i sont les sommets du rectangle K , $1 \leq i \leq 4$ (on étudiera au Chapitre II les effets de l'utilisation de telles formules sur les majorations d'erreurs). On a

$$-\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\,\Delta x} - \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\,\Delta y} + u_{i,j} = f_{i,j} \quad ,$$

$$-\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\,\Delta x} + v_{i,j} = 0 \quad ,$$

$$-\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\,\Delta y} + w_{i,j} = 0 \quad ,$$

pour $1 \leq i,j \leq I-1, J-1$,

$$u_{0,j} = w_{0,j} = 0 \quad , \quad 0 \leq j \leq J \quad ,$$

$$-\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\Delta x} + v_{0,j} = 0 \quad , \quad 0 \leq j \leq J \quad ,$$

avec des équations analogues le long des autres côtés du rectangle $\overline{\Omega}$.

I.4 - Méthodes d'éléments finis discontinues ; résultats généraux

Soit une triangulation $\mathcal{C}_h$ de $\overline{\Omega}$ en éléments finis K dont les diamètres sont inférieurs à h. Sur chaque élément K, on considère un espace de fonctions P_K tel que

$$P_K \subset C^1(K)$$

Soit l'espace de fonctions (défini en (0.42)) $W_h = \left(\prod_{K \in \mathcal{C}_h} P_K\right)^p$.
On a l'inclusion

$$W_h \subset L^q(\Omega) \tag{4.1}$$

On pose, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$

$\nu_{i,K}$ = $i^{\text{ème}}$ composante de la normale à ∂K, extérieure à K, $1 \leq i \leq n$.

$$B_K(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\, \nu_{i,K}(x) \quad , \text{ pour } \quad x \in \partial K \tag{4.2}$$

Soit M_K une matrice de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, définie pour $x \in \partial K$, satisfaisant la condition

$$M_K + M_K^* \geqslant 0 \tag{4.3}$$

et égale à M pour $x \in \partial K \cap \partial\Omega$

Si S est une face de K, on note $B_{K,S}$ (resp. $M_{K,S}$) la restriction de la matrice B_K (resp. M_K) à la face S ; d'autre part, si cette face S de K n'est pas incluse dans $\partial\Omega$, on appelle <u>trace extérieure sur</u> S d'une fonction $v_h \in W_h$ la valeur de v_h le long de S, à l'extérieur de K.

<u>Définition 4.1</u> : On définit le problème approché de la façon suivante.
<u>Trouver</u> $u_h \in W_h$ <u>tel que pour tout</u> $v_h \in W_h$

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left(Au_h - f, v_h\right)_{L^2(K)} - \int_{\partial K} \left(\frac{B_K - M_K}{2}\,(u_h - \xi_h), v_h\right) ds = 0 \,, \tag{4.4}$$

où :

$$\xi_h = \begin{cases} 0 & \text{<u>sur</u> } \partial K \cap \partial\Omega \\ \text{<u>trace extérieure de</u> } u_h \text{ <u>sur</u> } & \partial K - (\partial K \cap \partial\Omega) \,. \end{cases} \tag{4.5}$$

Remarque 4.1 : L'équation (4.4) peut encore s'écrire :

$$(4.6)\quad \frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\Big\{(Au_h,v_h)_{L^2(K)}+(u_h,A^*v_h)_{L^2(K)}+\int_{\partial K}(B_K\xi_h,v_h)\,ds+$$
$$+\int_{\partial K}(M_K(u_h-\xi_h),v_h)\,ds\Big\}=\sum_{K\in\mathcal{C}_h}(f,v_h)_{L^2(K)}\ ,$$

pour tout $v_h\in W_h$.

On a le

Lemme 4.1 : On suppose que pour tout couple d'éléments $K_1, K_2\in\mathcal{C}_h$ adjacents le long d'une face S, on choisisse

$$(4.7)\qquad M_{K_1,S}=M_{K_2,S}=M_S\ ,$$

où M_S satisfait l'hypothèse (4.3). On a alors :

$$(4.8)\quad \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}(M_K(u_h-\xi_h),u_h)\,ds=\sum_{S\not\subset\partial\Omega}\int_S(M_S(u_h-\xi_h),u_h-\xi_h)\,ds+$$
$$+\sum_{S\subset\partial\Omega}\int_S(Mu_h,u_h)\,ds\geq 0$$

Démonstration : Soient u_1 et u_2 les restrictions de u_h aux éléments K_1 et K_2 respectivement. La contribution à l'expression (4.8) de la face commune aux éléments K_1 et K_2 est égale à :

$$(4.9)\quad \int_S\Big((M_{K_1,S}(u_1-u_2),u_1)+(M_{K_2,S}(u_2-u_1),u_2)\Big)\,ds=\int_S(M_S(u_1-u_2),u_1-u_2)\,ds$$

La contribution à l'expression (4.6) d'une face S incluse dans $\partial\Omega$ est égale à :

$$(4.10)\qquad \int_S(Mu_h,u_h)\,ds\ .$$

En sommant les égalités (4.9) et (4.10) pour toutes les faces S de tous les éléments $K\in\mathcal{C}_h$, on obtient l'égalité (4.8). Les hypothèses (4.3) et (1.3) entraînent la positivité de cette expression.

On peut montrer le

Théorème 4.1 : On suppose que l'hypothèse du Lemme 4.1 est satisfaite et que le second membre f appartient à $L^2(\Omega)$. Alors le problème (4.4) a une solution unique u_h appartenant à W_h et on a :

$$(4.11)\qquad |u_h|_{L^2(\Omega)}\leq C|f|_{L^2(\Omega)}$$

où C est une constante indépendante de h .

Démonstration : Soit X_h l'expression définie par

$$(4.12)\quad X_h = \sum_{K\in\mathcal{C}_h} \left\{ (Au_h, u_h)_{L^2(K)} - \frac{1}{2}\int_{\partial K} \left((B_K - M_K)(u_h - \xi_h), u_h \right) ds \right\},$$

où la fonction ξ_h est définie comme en (4.5).

D'après le Lemme 1.2 appliqué dans K, on a

$$(Au_h, u_h)_{\mathbb{L}^2(K)} - \frac{1}{2}\int_{\partial K} (B_K u_h, u_h)\, ds = \frac{1}{2}\left((A+A^*)u_h, u_h \right)_{\mathbb{L}^2(K)} .$$

Puisque l'opérateur A est positif, on en déduit

$$(4.13)\quad (Au_h, u_h)_{\mathbb{L}^2(K)} - \frac{1}{2}\int_{\partial K} (B_K u_h, u_h)\, ds \geq \frac{c_0}{2} |u_h|^2_{\mathbb{L}^2(K)} .$$

D'autre part, soit S une face commune à deux éléments K_1 et K_2 de $\mathcal{C}_h$. On a $B_{K_1,S} = -B_{K_2,S}$. Puisque la fonction ξ_h est nulle le long de $\partial\Omega$, on en déduit

$$(4.14)\quad \sum_{K\in\mathcal{C}_h} \int_{\partial K} (B_K \xi_h, u_h)\, ds = 0 .$$

En combinant les relations (4.6), (4.10), (4.11) et (4.12), on a

$$X_h \geq \frac{c_0}{2} |u_h|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

Cette dernière inégalité entraîne l'existence d'une solution unique $u_h \in W_h$ pour le problème (4.4). D'après la définition (4.1), on a de plus :

$$X_h = (f, u_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

Des deux dernières relations, on déduit l'inégalité (4.11).

Définition 4.2 : Le schéma (4.4) est dit stable s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que pour tout $v_h \in W_h$

$$(4.15)\quad X_h = \sum_{K\in\mathcal{C}_h} \left\{ (Av_h, v_h)_{\mathbb{L}^2(K)} - \frac{1}{2}\int_{\partial K} \left((B_K - M_K)(v_h - \eta_h), v_h \right) ds \right\} \geq C |v_h|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

où

$$\eta_h = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial K \cap \partial\Omega \\ \text{trace extérieure de } v_h \text{ sur } \partial K - (\partial K \cap \partial\Omega) \end{cases} .$$

La stabilité, définie comme ci-dessus, entraîne l'existence d'une solution unique dans W_h pour le problème (4.4). Les hypothèses du Lemme 4.1 constituent en fait des conditions suffisantes de stabilité pour le schéma (4.4).

Le problème (4.3) conduit à la résolution d'un système linéaire dont le nombre d'équations (et d'inconnues) est égal à $\sum_{K \in \mathcal{C}_h}$ (dimension P_K). Dans les applications pratiques où P_K est souvent l'image par une transformation isoparamétrique d'un espace de polynômes, le nombre d'équations, donc la taille de la matrice du système à inverser, croît rapidement avec le degré des polynômes. D'autre part, la solution numérique en un point du domaine dépend des valeurs des données (matrices A_i, $0 \le i \le n$ et second membre f) en tous les points du domaine. Cependant, pour certains problèmes, la solution exacte u en un point x_0 de Ω ne dépend que des valeurs des données sur une partie de Ω dont la frontière passe par x_0 ; nous allons voir, sur des exemples que cette propriété peut encore être approximativement vérifiée pour la solution approchée.

Exemple 4.1 : On considère le cas où le système (1.1) se réduit à une seule équation à coefficients constants. En dimension $n = 2$, on a donc (voir Chapitre III)

$$(4.16) \qquad A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + A_0 u = f \qquad \text{pour } (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 .$$

Supposons pour simplifier que l'on ait $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$. La solution u en un point (x_1°, x_2°) ne dépend que des valeurs de A_0, f et u sur la caractéristique passant par (x_1°, x_2°), c'est-à-dire la droite d'équation.

$$(4.17) \qquad A_1 (x_2 - x_2^\circ) - A_2 (x_1 - x_1^\circ) = 0 ,$$

et en amont du point (x_1°, x_2°), c'est-à-dire pour $x_1 < x_1^\circ$.

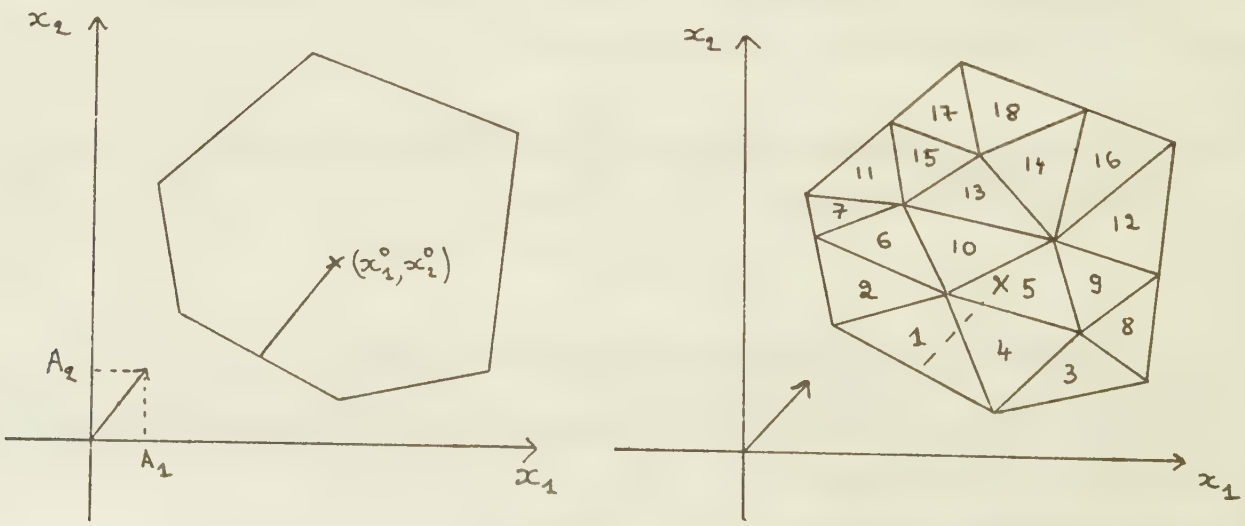


Figure 4.1

Exemple 4.2 : On considère le cas où une des matrices A_i, $1 \leq i \leq n$ peut se réduire à une matrice diagonale à coefficients ≥ 0 , par exemple A_n. La variable x_n peut être traitée comme une variable de temps, et la solution u à l'instant x_n° ne dépend que des données aux instants précédents.

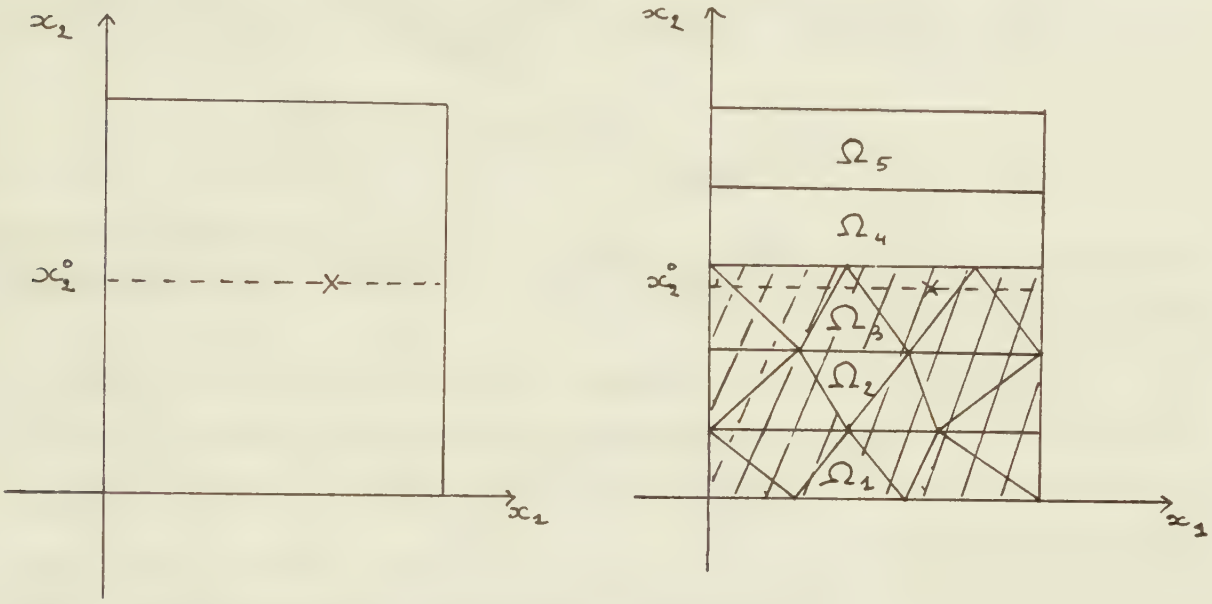


Figure 4.2

Dans ces deux exemples, l'hypothèse générale suivante est satisfaite.

(4.18)

Le domaine $\overline{\Omega}$ peut être décomposé en un ensemble de sous-domaines Ω_i, $1 \leq i \leq N$, avec $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$ et tels que :

(i) La frontière $\partial\Omega_i$ de chaque Ω_i est la réunion d'un ensemble de faces d'éléments de $\mathcal{C}_R$

(ii) Sur $\partial\Omega_i - (\partial\Omega_i \cap \partial\Omega)$ on a soit $B \geq 0$, soit $B \leq 0$

(iii) Il existe une numérotation des domaines Ω_i , $1 \leq i \leq N$ telle que, pour tout indice $j = 1, \ldots, N$, toute face d'un élément fini K de Ω_j incluse dans $\partial_- \Omega_j$ soit ou bien un sous-ensemble de $\partial_- \Omega$ ou bien un sous-ensemble de $\partial_+ \Omega_i$ pour un indice $i < j$, où

$$\partial_+ \Omega_i = \{ x \in \partial\Omega_i \, ; \, B > 0 \} \, , \quad \partial_- \Omega_i = \{ x \in \partial\Omega_i \, ; \, B < 0 \} \, .$$

On a :

Lemme 4.2 : On suppose que l'hypothèse précédente est satisfaite. Alors le problème (4.3) peut se mettre sous la forme de N problèmes sur chaque domaine Ω_i, $1 \le i \le N$.

$$(4.19)\quad \sum_{K \subset \Omega_i} \left\{ (Au_h - f, v_h)_{L^2(K)} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{S \subset \partial K \\ S \not\subset \partial\Omega_i}} \int_S ((B_K - M_K)(u_h - \xi_h), v_h)\, ds \right\} +$$

$$+ \sum_{S \subset \partial\Omega_i} \int_S ((M_K(u_h - \xi_h), v_h)\, ds = 0 \quad ,$$

pour tout $v_h \in W_h$, pour $1 \le i \le N$, et on peut traiter successivement les problèmes sur chaque domaine Ω_i, $1 \le i \le N$, dans l'ordre défini par cette numérotation.

Démonstration : Soit K un élément de Ω_i ayant une face S incluse dans $\partial_- \Omega_i$ (resp. $\partial_+ \Omega_i$). Sur cette face S, on a $B_{K,S} < 0$ (resp. > 0). D'après le Lemme 4.1 et le Théorème 4.1 on peut choisir $M_S = -B_{K,S}$ (resp. $M_S = +B_{K,S}$)
De la Définition 4.1 et de l'égalité (4.20) découle l'égalité (4.19). L'Hypothèse (4.18) permet alors de traiter successivement les problèmes sur chaque domaine Ω_i, $1 \le i \le N$, dans le sens du cheminement.

Retournons maintenant aux exemples :

Exemple 4.1 (suite) : Les sous-domaines Ω_i sont ici les éléments K de la triangulation. Sur chaque face S de K , le scalaire $B = A_1 n_1 + A_2 n_2$ où $\vec{n} = (n_1, n_2)$ est la normale à S extérieure à K , est positif (resp. négatif) si la direction caractéristique (A_1, A_2) traverse S en sortant (resp. en entrant) dans K . Sur la figure 4.1, on indique un cheminement possible. Pour calculer la solution approchée au point (x_1°, x_2°) se trouvant dans l'élément numéroté 5, on a besoin de calculer d'abord la solution dans les éléments numérotés 1, 3 et 4.
Le problème (4.14) sera traité plus en détail au Chapitre III.

Exemple 4.2 (suite) : Les sous-domaines Ω_i sont ici (figure 4.2) des parallélépipèdes à côtés parallèles aux axes. L'ensemble des équations (4.19), pour $1 \le i \le N$, constitue en fait une méthode à un pas pour l'intégration suivant la variable de temps x_n

Remarque 4.2 : Le Lemme 4.2 montre que la matrice du système linéaire peut être rendue bloc triangulaire, ou les blocs diagonaux sont de taille raisonnable (égale à $\dim P_K$ dans l'exemple 4.1).

Considérons à nouveau le cas général ; on a les résultats de majoration d'erreur suivants :

Lemme 4.3 : On suppose que les hypothèses (4.2) et (4.5) sont satisfaites pour toutes les faces des éléments de $\mathcal{C}_h$. On a alors :

$$(4.21)\quad \frac{c_0}{2}|u_h-v_h|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{S\subset\overline{S}_h}\int_S \left(M_S(u_h-\xi_h-v_h+\eta_h),u_h-\xi_h-v_h+\eta_h\right)ds \leq$$

$$\leq \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\left\{\left(A(u-v_h),u_h-v_h\right)_{L^2(K)} + \int_{\partial K}\tfrac{1}{2}\left((B_K-M_K)(v_h-\eta_h),u_h-v_h\right)ds\right\}$$

pour tout $v_h\in W_h$, où $\overline{S}_h$ est défini dans la Remarque 4.3, et où

$$\eta_h = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial K\cap\partial\Omega \\ \text{trace extérieure de } v_h \text{ sur } & \partial K-(\partial K\cap\partial\Omega)\end{cases}$$

Démonstration : Soit $E_h(u_h-v_h)$ définie par :

$$(4.22)\quad E_h(u_h-v_h) = \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\left\{\left(A(u_h-v_h),u_h-v_h\right)_{L^2(K)} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\int_{\partial K}\left((B_K-M_K)(u_h-\xi_h-v_h+\eta_h),u_h-v_h\right)ds\right\}.$$

On a, comme en (4.14) :

$$(4.23)\quad \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\left(B_K(\xi_h-\eta_h),u_h-v_h\right)ds = 0$$

D'après le Lemme 1.2 appliqué à chaque élément K, on a

$$(4.24)\quad \left(A(u_h-v_h),u_h-v_h\right)_{L^2(K)} - \frac{1}{2}\int_{\partial K}\left(B_K(u_h-v_h),u_h-v_h\right)ds = \frac{1}{2}\left((A+A^*)(u_h-v_h),u_h-v_h\right)_{L^2(K)}$$

En combinant les égalités (4.20), (4.21) et (4.22) avec le Lemme 4.1, on obtient, puisque l'opérateur A est positif :

$$E_h(u_h-v_h) \geq \frac{c_0}{2}|u_h-v_h|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{S\subset\overline{S}}\int_S\left(M_S(u_h-\xi_h-v_h+\eta_h),u_h-\xi_h-v_h+\eta_h\right)ds.$$

D'après la définition du problème approché, on a :

$$E_h(u_h-v_h) = \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\left\{\left(A(u-v_h),u_h-v_h\right)_{L^2(K)} + \frac{1}{2}\int_{\partial K}\left((B_K-M_K)(v_h-\eta_h),u_h-v_h\right)ds\right\}.$$

Les deux dernières relations entraînent l'inégalité (4.21).

Remarque 4.3 : En utilisant le Lemme 4.2 sur chaque élément K de $\mathcal{C}_h$, le second membre de l'inégalité (4.19) peut s'écrire :

$$(4.24)\quad E_h(u_h - v_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left(u - v_h, A^*(u_h - v_h)\right)_{\mathbb{L}^2(K)} +$$

$$+ \sum_{S \in \overline{S}_h} \int_S \left(B_S\left(u - \tfrac{1}{2}(v_S^1 + v_S^2)\right), u_S^1 - v_S^1 - u_S^2 + v_S^2\right) ds -$$

$$- \sum_{S \in \overline{S}_h} \tfrac{1}{2} \int_S \left(M_S(v_S^1 - v_S^2), u_S^1 - v_S^1 - u_S^2 + v_S^2\right) ds$$

où u_S^1 et u_S^2 (resp. v_S^1 et v_S^2) désignent les valeurs de u_h (resp. v_h) dans les éléments K_1 et K_2 adjacents le long de S, M_S est définie comme en (4.7) et $B_S = B_{K_1,S}$, et $\overline{S}_h$ dénote l'ensemble des faces S des éléments K de $\mathcal{C}_h$. En particulier, si $P_K = P_0$, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, le premier terme de l'expression (4.24) est nul ; cette remarque sera utile pour montrer la convergence de méthodes utilisant des polynômes de degré zéro.

Théorème 4.2 : On suppose que les hypothèses (4.3) et (4.7) sont satisfaites pour toutes les faces S des éléments K de $\mathcal{C}_h$ et que l'on a des inclusions $P_k \subset \hat{P}$ dans le cas simplicial, et $Q_k \subset \hat{P}$ dans le cas quadrilatéral, pour un entier $k \geq 1$.
On suppose d'autre part que la solution exacte u du problème (1.1), (1.2) appartient à $\mathbb{H}^{k+1}(\Omega)$. On a alors :

$$(4.25)\quad |u - u_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C h^k |u|_{k+1,2,\Omega} .$$

Démonstration : Nous allons nous servir du Lemme 4.3.
Soit une fonction v définie sur un élément K et appartenant à $\mathbb{L}^2(K)$. Sa projection $\Pi_K v \in P_K$ au sens de $\mathbb{L}^2(K)$ est telle que :

$$(4.26)\quad \int_K (\Pi_K v - v) w \, dx = 0 \qquad \text{pour tout } w \in P_K .$$

Soit maintenant une fonction v appartenant à $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on définit $\Pi_h v \in W_h$ comme l'unique élément de W_h dont la restriction à chaque élément K est égale à $\Pi_K v$. On a $\Pi_K v = v$ dès que la restriction de v à P_K appartient à P_k (resp. Q_k dans le cas quadrilatéral).

En utilisant un résultat analogue au Lemme 0.11, on a :

$$(4.27)\quad \|v-\Pi_h v\|_{\mathbb{H}^1(K)} \leq c\,h^k\,|v|_{k+1,2,K} \qquad \text{, pour tout } K\in\mathcal{C}_h$$

et tout $v \in \mathbb{H}^{k+1}(\Omega)$.

De cette inégalité, on déduit que :

$$(4.28)\quad \sum_{K\in\mathcal{C}_h} \left(A(u-\Pi_h u),\, u_h-\Pi_h u\right)_{\mathbb{L}^2(K)} \leq c\,h^k\,|u|_{k+1,2,\Omega}\,|u_h-\Pi_h u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,.$$

En raisonnant comme dans le Lemme 0.10, on a

$$(4.29)\quad \int_{\partial K}\left((B_K-M_K)(v-\Pi_h v),\, w_h\right)ds \leq c\,h^k\,|v|_{k+1,2,\Omega}\,|w_h|_{\mathbb{L}^2(K)}\,,$$

pour tout $K\in\mathcal{C}_h$, $v\in\mathbb{H}^{k+1}(\Omega)$, $w_h\in W_h$.

On déduit de cette inégalité que

$$(4.30)\quad \left|\sum_{K\in\mathcal{C}_h} \tfrac{1}{2}\int_{\partial K}\left((B_K-M_K)(\Pi_h u-\eta_h),\, u_h-\Pi_h u\right)ds\right| =$$

$$= \left|\sum_{K\in\mathcal{C}_h} \tfrac{1}{2}\int_{\partial K}\left((B_K-M_K)(\Pi_h u-u+u-\eta_h),\, u_h-\Pi_h u\right)ds\right| \leq$$

$$\leq c\,h^k\,|u|_{k+1,2,\Omega}\,|u_h-\Pi_h u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,,$$

où

$$\eta_h = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial K\cap\partial\Omega \\ \text{trace extérieure de } \Pi_h u & \text{sur } \partial K-(\partial K\cap\partial\Omega) \end{cases}$$

Dans (4.21), on peut choisir $v_h=\Pi_h u$. On obtient alors l'inégalité (4.25) grâce aux inégalités (4.28) et (4.30).

Remarque 4.4 : La majoration d'erreur (4.25) donnée dans le Théorème 4.2 montre que la solution du problème approché converge vers la solution exacte du problème (1.1), (1.2) dès que l'inclusion suivant est satisfaite:

$$P_1 \subset \hat{P}$$

Le Théorème 4.2 ne permet pas de prévoir la convergence de la méthode lorsqu'on utilise des polynômes de degré zéro.

Nous verrons en fait dans les exemples du paragraphe 5 et au Chapitre III (équation de transport) que l'on peut obtenir des méthodes convergentes en utilisant des polynômes de degré zéro ; ce qu'on appellera résultats de "super-convergence".

I.5 - Méthodes d'éléments finis discontinues ; exemples et super-convergence

Dans ce paragraphe, on considère deux exemples en dimension d'espace égale à 1, et on explicite les schémas numériques correspondant aux méthodes discontinues définies en (4.4). On donne une analyse de la consistance de ces schémas au sens des différences finies. On pourra ensuite obtenir des résultats de majoration d'erreur plus précis que les résultats du Théorème 4.2.

Exemple 5.1 : Nous allons reprendre le problème décrit dans l'exemple 1.1 :

$$\frac{du}{dx} + \sigma u = f \qquad \text{pour} \qquad x \in]0,1[\tag{5.1}$$

$$u(0) = 0 \tag{5.2}$$

On découpe l'intervalle $[0,1]$ comme en (3.19) de la façon suivante :

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_I = 1 \tag{5.3}$$

Soit W_h l'espace des fonctions dont la restriction à chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq I-1$, est un polynôme de P_k .
Le problème 4.4 s'écrit alors
Trouver $u_h \in W_h$ tel que :

$$\begin{aligned} -\sum_{j=0}^{I-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{du_h}{dx} + \sigma u_h - f \right) v_h \, dx \; + \\ + \sum_{j=0}^{I-1} \tfrac{1}{2} (1 - \theta_{j+1}) (u_{j+1}^+ - u_{j+1}^-) v_{j+1}^- \; + \\ + \sum_{j=0}^{I-1} \tfrac{1}{2} (1 + \theta_j) (u_j^+ - u_j^-) v_j^+ = 0 \quad , \end{aligned} \tag{5.4}$$

pour tout $v_h \in W_h$, $u_j^+ = u_h(x_j^+)$, $u_j^- = u_h(x_j^-)$,
pour $0 \leq j \leq I$, et où les quantités θ_j sont des nombres réels positifs et représentent les "matrices" $M(x_j)$, $0 \leq j \leq I$.

Pour satisfaire la condition aux limites (5.2), on choisit $u_0^- = u(0)$ et $\theta_0 = 1$ (cette dernière condition n'est en fait pas nécessaire dans le cas d'une équation scalaire, et on peut s'affranchir du cadre donné par l'équation (4.4) en choisissant $\theta_0 \geq 0$ et non nécessairement égal à 1).

Pour $x = 1$, on choisit $\theta_I = 1$, ce qui entraîne que la quantité u_I^+ n'apparaît pas dans l'équation (5.4).

Pour obtenir la solution du problème (5.4), il faut résoudre un système linéaire de $I(k+1)$ équations et on a, d'après le Théorème 4.3, la majoration d'erreur

$$(5.5) \quad |u - u_k|_{L^2(0,1)} \leq C k^{\Delta} |u|_{\Delta+1,2,(0,1)} \quad ,$$

si $u \in H^{\Delta+1}(0,1)$ pour un entier Δ tel que $1 \leq \Delta \leq k$.
Un cas particulier intéressant correspond aux choix :

$$(5.6) \quad \theta_j = 1 \quad , \text{ pour } \quad 0 \leq j \leq I \quad .$$

Dans ce cas le problème (5.4) se découple, d'après le Lemme 4.2 en un ensemble de problèmes sur chaque intervalle (voir exemple 4.1) de la façon suivante :

$$(5.7) \quad \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{du_k}{dx} + \sigma u_k - f \right) v_k \, dx + (u_j^+ - u_j^-) v_j^+ = 0 \quad ,$$

pour tout $v_k \in P_k$, et pour $0 \leq j \leq I-1$.
On a alors à résoudre I systèmes linéaires comportant chacun $k+1$ équations et on a la majoration ([31])

$$(5.8) \quad |u - u_k|_{L^2(0,1)} \leq C k^{\Delta+1} |u|_{\Delta+2,2,(0,1)} \quad ,$$

si $u \in H^{\Delta+2}(0,1)$ pour un entier Δ tel que $0 \leq \Delta \leq k$
Dans ce cas, en utilisant des polynômes de P_k , on peut obtenir une erreur en $O(h^{k+1})$ alors que dans le cas général, on n'obtient qu'une erreur en $O(h^k)$; d'autre part l'utilisation de polynômes de P_0 donne ici une erreur en $O(h)$.

On étudie maintenant le cas des <u>polynômes de degré zéro</u>, on discute suivant les valeurs de θ_j différentes de 1, $1 \leq j \leq I-1$ et on montre qu'on peut avoir convergence.
On suppose que l'on a :

$$(5.9) \quad \begin{cases} \theta_j = \theta \geq 0 \quad , \quad \theta \neq 1 \quad , \quad 1 \leq j \leq I-1 \\ \theta_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \theta_I = 1 \end{cases}$$

<u>Le schéma</u> (5.4) <u>s'écrit alors</u>

$$(5.10) \quad \frac{1}{2}(u_{i+3/2} - u_{i-1/2}) - \frac{\theta}{2}(u_{i+3/2} - 2u_{i+1/2} + u_{i-1/2}) + (\sigma u_{i+1/2} - f_{i+1/2})(x_{i+1} - x_i) = 0$$

pour $1 \leq i \leq I-2$,

$$(5.11)\quad \frac{1-\theta}{2}\left(u_{3/2}-u_{1/2}\right)+\frac{1+\theta_0}{2}\left(u_{1/2}-u(0)\right)+\left(\sigma u_{1/2}-f_{1/2}\right)(x_1-x_0)=0 ,$$

$$(5.12)\quad \frac{1+\theta}{2}\left(u_{I-1/2}-u_{I-3/2}\right)+\left(\sigma u_{I-1/2}-f_{I-1/2}\right)(x_I-x_{I-1})=0$$

où $u_{i+1/2}$ désigne la valeur de u_h sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, et

$$f_{i+1/2}=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \quad \text{, pour} \quad 0 \leq i \leq I-1 .$$

Lorsque les longueurs des intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ sont égales à $h=\frac{1}{I}$ pour $0 \leq j \leq I-1$, on peut affecter, par exemple, la valeur $u_{i+1/2}$ au point $x_{i+1/2}=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})$, $0 \leq i \leq I-1$.

Les équations (5.10) sont consistantes (au sens des différences finies) avec l'équation (5.1) et l'erreur de troncature est en $O(h)$ si θ est différent de zéro et en $O(h^2)$ si $\theta=0$.

L'équation (5.11) n'est consistante avec l'équation (5.1) (et l'erreur de troncature est alors en $O(h)$) que si la relation $\theta_0-2\theta=1$ est satisfaite ; on a de plus une erreur de troncature en $O(h^2)$ si $\theta=\frac{1}{3}$ et $\theta_0=\frac{5}{3}$.

L'équation (5.12) n'est jamais consistante avec l'équation (5.1) (erreur de troncature en $O(1)$).

Lorsque les longueurs des intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq I-1$, sont inégales, les équations (5.10) et (5.12) ne sont pas consistantes (au sens des différences finies) avec l'équation (5.1).

On va maintenant démontrer des résultats de convergence. Pour cela, on a besoin du résultat technique suivant :

Lemme 5.1 : Soit $u_h \in W_h$ la solution du problème (5.4). On a la majoration :

$$(5.13)\quad \frac{c_0}{2}\left|u_h-v_h\right|^2_{L^2(0,1)}+\sum_{j=1}^{I-1}\frac{\theta_j}{2}\left(u_j^+-u_j^--v_j^++v_j^-\right)^2+\frac{\theta_0}{2}\left(u_0^+-v_0^+\right)^2+\frac{\theta_I}{2}\left(u_I^--v_I^-\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{I-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}(u-v_h)\left(-\frac{d}{dx}(u_h-v_h)+\sigma(u_h-v_h)\right)dx +$$

$$+\sum_{j=0}^{I}\left(u(x_j)-\frac{1+\theta_j}{2}v_j^--\frac{1-\theta_j}{2}v_j^+\right)\left(u_j^--u_j^+-v_j^-+v_j^+\right) ,$$

pour tout $v_h \in W_h$, où on a posé

$$u_I^+ = v_I^+ = 0 \quad , \quad u_0^- = v_0^- = u(0)$$

La deuxième somme du second membre de l'inégalité (5.13) peut se mettre aussi sous la forme suivante, lorsqu'on utilise des polynômes de P_0 :

$$(5.14)\quad \sum_{j=0}^{I-1} \left(u(x_{j+1}) - \frac{1+\theta_{j+1}}{2} v_{j+1/2} - \frac{1-\theta_{j+1}}{2} v_{j+3/2}\right)\left(u_{j+1/2} - v_{j+1/2}\right) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{I-1} \left(\frac{1-\theta_j}{2} v_{j+1/2} + \frac{1+\theta_j}{2} v_{j-1/2} - u(x_j)\right)\left(u_{j+1/2} - v_{j+1/2}\right)$$

où $u_{j+1/2}$ désigne la valeur de u_h sur l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, $0 \le j \le I-1$, et où on pose $u_{-1/2} = v_{-1/2} = u(0)$, $u_{I+1/2} = v_{I+1/2} = 0$.

Démonstration : On utilise l'inégalité (4.19) du Lemme 4.3, dans laquelle le second membre a été remplacé par l'expression (4.24) de la Remarque 4.3. Dans le premier membre de l'inégalité (4.19) et dans (4.24), on remplace les "matrices" B_S et M_S , $S \in \bar{S}_h$ par leurs expressions en fonction des coefficients θ_j , $0 \le j \le I$. On obtient ainsi l'inégalité (5.13).
Dans le cas où on utilise des polynômes de P_0 , on a

$$u_i^+ = u_{i+1}^- = u_{i+1/2} \quad , \quad 0 \le i \le I-1$$

Dans l'expression

$$\sum_{j=0}^{I} \left(u(x_j) - \frac{1+\theta_j}{2} v_{j-1/2} - \frac{1-\theta_j}{2} v_{j+1/2}\right)\left(u_{j-1/2} - u_{j+1/2} - v_{j-1/2} + v_{j+1/2}\right)$$

on peut regrouper les termes $u_{j+1/2} - v_{j+1/2}$, $0 \le j \le I-1$.
On obtient alors la relation (5.14).

On va maintenant discuter les résultats de majoration d'erreur suivant les valeurs de θ différentes de 1.

Théorème 5.1 : On choisit $\theta_j = 0$ pour $1 \le j \le I-1$, $\theta_0 = 1$ et $\theta_I = 1$. On suppose que la solution u appartient à $H^2(0,1)$ et que $x_{j+1} - x_j = h = \frac{1}{I}$, $0 \le j \le I-1$.
On a alors :

$$(5.15)\quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} + |u(x_{I-1/2}) - u_{I-1/2}| \le C h \|u\|_{H^2(0,1)} \quad ,$$

où C est une constante indépendante de h .

Démonstration : On utilise les expressions (5.13) et (5.14). On a :

$$(5.16)\quad \frac{c_0}{2}\,|u_R - v_R|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2}\left(u_{1/2} - v_{1/2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u_{I-1/2} - v_{I-1/2}\right)^2 \leq$$

$$\leq \int_0^1 \sigma(u - v_R)(u_R - v_R)\,dx \quad +$$

$$+ \sum_{j=1}^{I-2} \left(u(x_{j+1}) - \tfrac{1}{2} v_{j+3/2} + \tfrac{1}{2} v_{j-1/2} - u(x_j)\right)\left(u_{j+1/2} - v_{j+1/2}\right) +$$

$$+ \left(u(x_1) - \tfrac{1}{2} v_{3/2} - \tfrac{1}{2} v_{1/2}\right)\left(u_{1/2} - v_{1/2}\right) +$$

$$+ \left(u(x_I) - u(x_{I-1}) - \tfrac{1}{2} v_{I-1/2} + \tfrac{1}{2} v_{I-3/2}\right)\left(u_{I-1/2} - v_{I-1/2}\right)$$

On choisit $\quad v_{j+1/2} = u\left(\dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \quad , \quad 0 \leq j \leq I-1$

Puisque les intervalles $x_{j+1} - x_j$, $0 \leq j \leq I-1$, sont égaux on a :

$$u(x_{j+1}) - \tfrac{1}{2} v_{j+3/2} + \tfrac{1}{2} v_{j-1/2} - u(x_j) = 0 \qquad \text{pour tout } u \in P_2 ,$$

pour $1 \leq j \leq I-2$,

$$u(x_1) - \tfrac{1}{2} v_{3/2} - \tfrac{1}{2} v_{1/2} = 0 \qquad \text{pour tout } u \in P_1 ,$$

$$u(x_I) - u(x_{I-1}) - \tfrac{1}{2} v_{I-1/2} + \tfrac{1}{2} v_{I-3/2} = 0 \qquad \text{pour tout } u \in P_0$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (u - v_R)(u_R - v_R)\,dx = 0 \qquad \text{pour tout } u \in P_1 ,$$

pour $0 \leq j \leq I-1$.

En utilisant le Lemme 0.3 et en raisonnant comme dans [6], on obtient :

$$(5.17)\quad \sum_{j=1}^{I-2} \left(u(x_{j+1}) - \tfrac{1}{2} v_{j+3/2} + \tfrac{1}{2} v_{j-1/2} - u(x_j)\right)\left(u_{j+1/2} - v_{j+1/2}\right) \leq$$

$$\leq C h^{\Delta} \|u\|_{H^{\Delta+1}(0,1)} |u_R - v_R|_{L^2(0,1)}$$

où Δ est un entier tel que $0 \leq \Delta \leq 2$,

$$(5.18)\quad \left|\left(u(x_1) - \tfrac{1}{2} v_{3/2} - \tfrac{1}{2} v_{1/2}\right)\left(u_{1/2} - v_{1/2}\right)\right| \leq C h^{\alpha} \|u\|_{W^{\alpha,\infty}(0,1)} \left|u_{1/2} - v_{1/2}\right| ,$$

$$(5.19)\quad \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u - v_R)(u_R - v_R)\,dx\right| \leq C h^{\lambda} \|u\|_{H^{\alpha}(0,1)} |u_R - v_R|_{L^2(0,1)}, \quad 0 \leq i \leq I-1 ,$$

où α est un entier tel que $1 \leq \alpha \leq 2$,

$$(5.20)\quad \left|\left(u(x_I) - u(x_{I-1}) - \tfrac{1}{2} v_{I-1/2} + \tfrac{1}{2} v_{I-3/2}\right)\left(u_{I-1/2} - v_{I-1/2}\right)\right| \leq$$
$$\leq c h \|u\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \left| u_{I-1/2} - v_{I-1/2} \right| .$$

Des inégalités (5.16) à (5.20), on déduit l'inégalité (5.15), en utilisant l'inclusion $H^2(0,1) \subset W^{1,\infty}(0,1)$.

Remarque 5.1 : On retrouve dans la démonstration du théorème précédent les résultats prévisibles grâce à l'analyse de la consistance au sens des différences finies : l'erreur de troncature en $O(h^2)$ sur les intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $1 \leq j \leq I-2$, entraîne les majorations (5.17) et (5.19). L'erreur de troncature en $O(h)$ sur l'intervalle $[x_0, x_1]$ entraîne la majoration (5.18), et l'erreur en $O(1)$ sur l'intervalle $[x_{I-1}, x_I]$ entraîne la majoration (5.20) ; ces dernières majorations sont à rapprocher des résultats contenus dans [16].

Remarque 5.2 : Lorsque les intervalles sont inégaux, on ne peut montrer, par la méthode ci-dessus, que la majoration suivante :

$$(5.21)\quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} \leq C \|u\|_{H^2(0,1)} ,$$

où la constante C peut être majorée par

$$(5.22)\quad C \leq C_1 \max \left\{ \frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} \; ; \; 1 \leq j \leq I-1 \right\}$$

où la constante C_1 est indépendante de h . (Voir Chapitre II § 3)

Théorème 5.2 : On choisit $\theta_j = \theta > 0$, $0 \leq j \leq I-1$, et $\theta_I = 1$ On suppose que la solution u appartient à $H^1(0,1)$ et que les intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq I-1$, sont inégaux. On a alors la majoration :

$$(5.23)\quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} + \left(\sum_{j=1}^{I-1} \left(u_{j+1/2} - u(x_{j+1/2}) - u_{j-1/2} + u(x_{j-1/2}) \right)^2 \right)^{1/2} +$$
$$+ \left| u_{1/2} - u(x_{1/2}) \right| + \left| u_{I-1/2} - u(x_{I-1/2}) \right| \leq c h^{1/2} \|u\|_{H^1(0,1)} .$$

On suppose maintenant que la solution u appartient à $H^2(0,1)$ et que les intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq I-1$ sont égaux. On a alors :

$$(5.24)\quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} + \left(\sum_{j=1}^{I-1} \left(u_{j+1/2} - u(x_{j+1/2}) - u_{j-1/2} + u(x_{j-1/2}) \right)^2 \right)^{1/2} +$$
$$+ \left| u_{1/2} - u(x_{1/2}) \right| + \left| u_{I-1/2} - u(x_{I-1/2}) \right| \leq c h \|u\|_{H^2(0,1)} .$$

Démonstration : On utilise l'expression 5.13, dans laquelle on écrit $u_j^+ = u_{j+1}^- = u_{j+1/2}$, $0 \le j \le I-1$. On a :

$$(5.25)\quad \frac{C_0}{2}\left|u_h - v_h\right|^2_{L^2(0,1)} + \frac{\theta}{2}\sum_{j=1}^{I-1}\left(u_{j+1/2} - v_{j+1/2} - u_{j-1/2} + v_{j-1/2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\theta}{2}\left(u_{1/2} - v_{1/2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u_{I-1/2} - v_{I-1/2}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{I-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} \nu\,(u - v_h)(u_h - v_h)\,dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{I-1}\left(u(x_j) - \frac{1+\theta}{2}v_{j-1/2} - \frac{1-\theta}{2}v_{j+1/2}\right)\left(u_{j-1/2} - v_{j-1/2} - u_{j+1/2} + v_{j+1/2}\right) +$$

$$+ \frac{1-\theta}{2}\left(u(0) - v_{1/2}\right)\left(v_{1/2} - u_{1/2}\right) + \left(u(x_I) - v_{I-1/2}\right)\left(u_{I-1/2} - v_{I-1/2}\right) ,$$

où $u_{j+1/2}$ et $v_{j+1/2}$ sont respectivement les valeurs de u_h et v_h sur l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, $0 \le j \le I-1$.

On peut choisir $v_{j+1/2} = u\left(\frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) + \frac{\theta}{2}(x_{j+1} - x_j)\right)$, $0 \le j \le I-1$,

et on a

$$u(x_j) - \frac{1+\theta}{2}v_{j-1/2} - \frac{1-\theta}{2}v_{j+1/2} = 0 \qquad , \quad 1 \le j \le I-1 ,$$

pour tout $u \in P_0$, lorsque les intervalles sont de longueurs inégales

pour tout $u \in P_1$, lorsque les intervalles sont de longueurs égales.

D'autre part, dans les deux cas, on peut écrire :

$$u(0) - v_{1/2} = 0 \qquad \text{et} \qquad u(x_I) - v_{I-1/2} = 0$$

pour tout $u \in P_0$

En utilisant le Lemme 0.3 et en raisonnant comme dans [6], on obtient :

$$(5.26)\quad \left(\sum_{j=1}^{I-1}\left(u(x_j) - \frac{1+\theta}{2}v_{j-1/2} - \frac{1-\theta}{2}v_{j+1/2}\right)^2\right)^{1/2} \le C\,h^{\alpha-1/2}\,\|u\|_{H^\alpha(0,1)} ,$$

où α est un entier égal à 1 lorsque les intervalles sont inégaux, et égal à 1 ou 2 lorsque les intervalles sont égaux,

$$(5.27)\quad \left|u(0) - v_{1/2}\right| + \left|u(x_I) - v_{I-1/2}\right| \le \begin{cases} C\,h^{1/2}\,\|u\|_{H^1(0,1)} \\ C\,h\,\|u\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \end{cases} .$$

D'autre part on a :

$$(5.28)\qquad \sum_{j=0}^{I-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (u-v_h)(u_h-v_h)\,dx \leq c h \|u\|_{H^2(0,1)} |u_h-v_h|_{L^2(0,1)} .$$

En combinant les inégalités (5.25), (5.26) (avec $\alpha = 1$), (5.27) et (5.28), on obtient l'inégalité (5.23).

En utilisant les inégalités (5.25) à (5.28) et l'inclusion

$$H^2(0,1) \subset W^{1,\infty}(0,1)$$

on obtient l'inégalité (5.24).

Remarque 5.3 : Dans la démonstration précédente, et dans le cas des intervalles égaux, on a supposé en fait que $\theta_j = \theta \leq 3$ pour $0 \leq j \leq I-1$ de telle sorte que le point d'abscisse $\frac{1}{2}(x_{I-2}+x_{I-1}) + \frac{\theta}{2}(x_{I-1}-x_{I-2})$ se trouve dans l'intervalle $[0,1]$. Lorsque $\theta > 3$, il faut définir un prolongement de u à l'extérieur de l'intervalle $[0,1]$, et le théorème reste valable.

Nous allons considérer brièvement le cas où on utilise des polynômes de degré un. Pour calculer les intégrales, on utilise alors la formule de quadrature suivante :

$$(5.29)\qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \sim \tfrac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big) , \quad 0 \leq i \leq I-1 .$$

On suppose que les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq I-1$, sont égaux, et on choisit $\theta_i = \theta \geq 0$ pour $0 \leq i \leq I-1$, $\theta_I = 1$

Le problème (5.4) conduit alors à la résolution du système linéaire suivant

$$(5.30)\qquad u_{i+1}^- + \theta u_i^+ - (1+\theta) u_i^- + \sigma h u_i^+ = h f(x_i) , \quad 0 \leq i \leq I-1,$$

$$(5.31)\qquad \theta u_{i+1}^- + (1-\theta) u_{i+1}^+ - u_i^+ + \sigma h u_{i+1}^- = h f(x_{i+1}) , \quad 0 \leq i \leq I-2,$$

$$(5.32)\qquad u_I^- - u_{I-1}^+ + \sigma h u_I^- = h f(x_I) ,$$

où les u_i^- et u_i^+, $0 \leq i \leq I$, sont définis comme en (5.4), et où $u_0^- = u(0)$

D'après l'inégalité (5.5), on obtient une erreur de l'ordre de h. Cependant, lorsque $\theta = 0$, en combinant les équations (5.30) et (5.31), et en posant

$$(5.33)\qquad 2 u_i^* = u_i^+ + u_i^- , \quad u_{i+1/2} = u_h(x_{i+1/2}) = \tfrac{1}{2}(u_i^+ + u_{i+1}^-) , \quad 0 \leq i \leq I-1,$$

On obtient le schéma suivant :

$$u^*_{i+1} - u^*_i + \sigma h u_{i+1/2} = \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) \quad , \quad 0 \le i \le I-2 \ ,$$

$$u_{i+1/2} - u_{i-1/2} + \sigma h u^*_i = h f(x_i) \quad , \quad 1 \le i \le I-1 \ ,$$

$$u^-_I - u^*_{I-1} + \sigma h u_{I-1/2} = \frac{h}{2}\left(f(x_I) + f(x_{I-1})\right) \ ,$$

$$2u^-_I - 2u_{I-1/2} + \sigma h u^-_I = h f(x_I) \ ,$$

$$2u_{1/2} - 2u^*_0 + \sigma h\left(2u^*_0 - u(0)\right) = h f(0) \ .$$

Ceci correspond à la discrétisation de l'équation (5.1) sur deux réseaux décalés de $\frac{h}{2}$ l'un par rapport à l'autre.
L'erreur de troncature pour les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \le i \le I-2$ et $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $1 \le i \le I-1$, est de l'ordre de h^2 .

Exemple 5.2 : On reprend le problème décrit dans l'Exemple 1.2, c'est-à-dire :

$$(5.34) \qquad -\frac{d^2u}{dx^2} + u = f \quad , \quad x \in]0,1[$$

$$(5.35) \qquad u(0) = u(1) = 0 \ ,$$

ou encore :

$$(5.36) \qquad -\frac{dv}{dx} + u = f \ ,$$

$$(5.37) \qquad -\frac{du}{dx} + v = 0 \ ,$$

$$(5.38) \qquad u(0) = u(1) = 0 \ .$$

On découpe l'intervalle $[0,1]$ en I intervalles égaux à h
Soit W_h l'espace des fonctions vectorielles (v_h, w_h) dont la restriction à chaque intervalle appartient à l'espace $P_h \times P_h$.
Le problème 4.4 peut s'écrire : Trouver $(u_h, v_h) \in W_h$ tel que

$$(5.39)\quad \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\left(-\frac{dv_R}{dx} + u_R - f \right) \varphi_R + \left(-\frac{du_R}{dx} + v_R \right) \psi_R \right) dx \; -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ (u_i^+ - u_i^-)\left(-\alpha_i \varphi_i^+ + (1-\beta_i)\psi_i^+ \right) + (v_i^+ - v_i^-)\left((1+\beta_i)\varphi_i^+ - \gamma_i \psi_i^+ \right) \right\} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{I} \left\{ (u_i^- - u_i^+)\left(-\alpha_i \varphi_i^- - (1+\beta_i)\psi_i^- \right) + (v_i^- - v_i^+)\left((\beta_i - 1)\varphi_i^- - \gamma_i \psi_i^- \right) \right\} = 0,$$

<u>pour tout</u> $(\varphi_R, \psi_R) \in W_R$, <u>où</u> $u_i^+ = u_R(x_i^+)$, $u_i^- = u_R(x_i^-)$,

<u>pour</u> $0 \le i \le I$, <u>où</u> $u_0^- = u_I^+ = 0$ <u>et où les quantités</u> $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ <u>sont les coefficients des matrices</u>

$$M_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \gamma_i \end{pmatrix} \quad , \text{ avec } \alpha_i \ge 0, \gamma_i \ge 0 \quad , 0 \le i \le I \; .$$

Pour exprimer les conditions aux limites (5.33), on choisit

$$\gamma_0 = \gamma_I = 0 \quad , \quad \beta_0 = -1 \quad , \quad \beta_I = 1 \; .$$

Pour obtenir la solution du problème (5.39), il faut résoudre un système linéaire comportant $I(k+\ell+2)$ inconnues. Le Lemme 4.2 ne peut pas s'appliquer ici et on ne peut pas découpler les équations, ce qui provient en fait du caractère elliptique du problème (5.34).

Lorsque la solution du problème (5.34), (5.35) appartient à $H^s(0,1)$, pour un entier s tel que $2 \le s \le \inf\{(k+2),(\ell+2)\}$, on a, d'après le théorème 4.2 la majoration :

$$(5.40)\quad |u - u_R|_{L^2(0,1)} + \left| \frac{du}{dx} - v_R \right|_{L^2(0,1)} \le C h^{s-2} \| u \|_{H^s(0,1)} \; .$$

On va indiquer maintenant que les résultats précédents ne sont pas nécessairement optimaux. On donnera des résultats complémentaires dans les cas simples $0 \le k+\ell \le 1$.

Dans tous les exemples donnés par la suite, on choisira

$$(5.41)\quad M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \; 1 \le i \le I-1 \; , \; \gamma_0 = \gamma_I = \alpha_0 = \alpha_I = 0 \; , \; \beta_0 = -\beta_I = -1$$

Pour la commodité d'écriture des schémas numériques, on pourra utiliser pour calculer les intégrales la formule de quadrature suivante :

$$(5.42)\qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \sim \frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)\ ,\ 0\le i\le I-1\ .$$

Pour $k=\ell=0$, le schéma (5.39) peut s'écrire, en calculant exactement les intégrales :

$$(5.42)\qquad -\tfrac{1}{2}\left(v_{i+3/2}-v_{i-1/2}\right)+h\,u_{i+1/2}=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\ ,\ 1\le i\le I-2\ ,$$

$$(5.43)\qquad -\tfrac{1}{2}\left(u_{i+3/2}-u_{i-1/2}\right)+h\,v_{i+1/2}=0\ ,\ 1\le i\le I-2\ ,$$

$$(5.44)\qquad -\tfrac{1}{2}\left(v_{3/2}-v_{1/2}\right)+h\,u_{1/2}=\int_0^h f(x)\,dx\ ,$$

$$(5.45)\qquad -\tfrac{1}{2}\left(u_{3/2}+u_{1/2}-2u(0)\right)+h\,v_{1/2}=0\ ,$$

$$(5.46)\qquad -\tfrac{1}{2}\left(v_{I-1/2}-v_{I-3/2}\right)+h\,u_{I-1/2}=\int_{1-h}^{1} f(x)\,dx\ ,$$

$$(5.47)\qquad -\tfrac{1}{2}\left(u_{I-3/2}+u_{I-1/2}-2u(1)\right)+h\,v_{I-1/2}=0\ ,$$

où $u_{i+1/2}$(resp. $v_{i+1/2}$) désigne la valeur de u_h(resp. v_h) sur l'intervalle $]x_i,x_{i+1}[$, $0\le i\le I-1$

Les équations (5.42) et (5.43) sont consistantes avec les équations (5.36) et (5.37) et l'erreur de troncature est en $O(h^2)$. Pour les équations (5.45) et (5.47), l'erreur de troncature est en $O(h)$ et pour les équations (5.44) et (5.46), elle est en $O(1)$.

Si on élimine $v_{i+1/2}$, $1\le i\le I-2$, entre les équations (5.42), (5.43) on obtient le schéma classique suivant :

$$(5.48)\qquad -\frac{u_{i+3/2}-2u_{i+1/2}+u_{i-1/2}}{4h^2}+u_{i+1/2}=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\ ,\ 2\le i\le I-3\ .$$

L'élimination de $v_{1/2}$(resp. de $v_{I-1/2}$) ne conduit pas à un schéma centré autour du point d'abscisse $\frac{h}{2}$ (resp. $1-\frac{h}{2}$).

Pour $k=1$, $\ell=0$, le schéma (5.39) peut s'écrire :

$$
(5.49)\quad \begin{cases}
-\frac{1}{2}\left(v_{i+\frac12}-v_{i-\frac12}\right)+\frac{h}{6}\left(2u_i^+ + u_{i+1}^-\right) = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\frac{x_{i+1}-x}{h}\,dx, \quad 1\le i\le I-1 \\
-\frac{1}{2}\left(v_{i+\frac12}-v_{i-\frac12}\right)+\frac{h}{6}\left(2u_i^- + u_{i-1}^+\right) = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\frac{x-x_{i-1}}{h}\,dx, \quad 1\le i\le I-1 \\
\frac{h}{6}\left(2u_0^+ + u_1^-\right) = \displaystyle\int_0^h f(x)\,\frac{h-x}{h}\,dx \ , \\
\frac{h}{6}\left(2u_I^- + u_{I-1}^-\right) = \displaystyle\int_{1-h}^{1} f(x)\,\frac{x-1+h}{h}\,dx \ , \\
-\frac{1}{2}\left(u_{i+1}^- + u_{i+1}^+\right)+\frac{1}{2}\left(u_i^- + u_i^+\right) + h\,v_{i+\frac12} = 0 \ , \quad 1\le i\le I-2 , \\
-u_1^- + u(0) + h\,v_{\frac12} = 0 \\
-u(1) + u_{I-1}^+ + h\,v_{I-\frac12} = 0
\end{cases}
$$

Les troisième et quatrième équations du système (5.49) approchent mal l'équation (5.37). On peut en fait supprimer ces deux équations en modifiant légèrement le problème (5.39). On introduit l'espace

$$
(5.50)\quad W_{h,0} = \left\{ (\varphi_h,\psi_h)\in W_h \ ; \ \varphi_0^+ = \varphi_I^- = 0 \right\} \ .
$$

On cherche alors $(u_h, v_h)\in W_{h,0}$ et satisfaisant l'équation (5.39) pour tout $(\varphi_h,\psi_h)\in W_{h,0}$. Le système linéaire obtenu se déduit du système (5.49) en supprimant les troisième et quatrième équations, et en posant :

$$
u_0^+ = u(0) \ , \quad u_I^- = u(1) \ .
$$

On cherche maintenant la solution $(u_h, v_h)\in W_{h,0}$ en calculant les intégrales par la formule (5.42). On obtient le système linéaire :

$$
\begin{aligned}
&-\left(v_{i+\frac12}-v_{i-\frac12}\right)+h\,u_i = h\,f(x_i) \ , \quad 1\le i\le I-1 , \\
&-\left(u_{i+1}-u_i\right)+h\,v_{i+\frac12} = 0 \ , \quad 1\le i\le I-2 , \\
&-\left(u_1-u(0)\right)+h\,v_{\frac12} = 0 \ , \\
&-\left(u(1)-u_{I-1}\right)+h\,v_{I-\frac12} = 0 \ ,
\end{aligned}
$$

où $u_i = u_i^+ = u_i^-$, $1 \le i \le I-1$

La méthode discontinue dégénère alors en méthode semi-discontinue (continue pour la fonction u et discontinue pour la fonction v).

On a une erreur de troncature en $O(h^2)$ pour les deux premières équations et en $O(h)$ pour les deux dernières, si on affecte les valeurs $v_{i+1/2}$ aux points $x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$.

Pour $h = 0$, $l = 1$, le schéma (5.39) peut s'écrire :

$$(5.52)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(u_{i+1/2} - u_{i-1/2}\right) + \frac{h}{6}\left(2v_i^+ + v_{i+1}^-\right) = 0 , & 1 \le i \le I-1 , \\ -\frac{1}{2}\left(u_{i+1/2} - u_{i-1/2}\right) + \frac{h}{6}\left(2v_i^- + v_{i-1}^+\right) = 0 , & 1 \le i \le I-1 , \\ -\left(u_{1/2} - u(0)\right) + \frac{h}{6}\left(2v_0^+ + v_1^-\right) = 0 , & \\ -\left(u(1) - u_{I-1/2}\right) + \frac{h}{6}\left(2v_I^- + v_{I-1}^+\right) = 0 , & \\ -\frac{1}{2}\left(v_{i+1}^- + v_{i+1}^+\right) + \frac{1}{2}\left(v_i^- + v_i^+\right) + h\,u_{i+1/2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\,dx , & 1 \le i \le I-2 , \\ -\frac{1}{2}\left(v_i^- + v_i^+\right) + v_0^+ + h\,u_{1/2} = \int_0^h f\,dx , & \\ -v_I^- + \frac{1}{2}\left(v_{I-1}^- + v_{I-1}^+\right) + h\,u_{I-1/2} = \int_{1-h}^1 f\,dx . & \end{cases}$$

Si on utilise les formules (5.42) pour calculer les intégrales, on a :

$$(5.53)\quad \begin{cases} -\left(u_{i+1/2} - u_{i-1/2}\right) + h\,v_i = 0 , & 1 \le i \le I-1 \\ -\left(v_{i+1} - v_i\right) + h\,u_{i+1/2} = \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) , & 0 \le i \le I-1 \\ -2\left(u_{1/2} - u(0)\right) + h\,v_0 = 0 , & \\ -2\left(u(1) - u_{I-1/2}\right) + h\,v_I = 0 , & \end{cases}$$

où $v_i = v_i^+ = v_i^-$, $1 \le i \le I-1$, $v_0 = v_0^+$ et $v_I = v_I^-$

L'erreur de troncature est en $O(h^2)$ pour les deux premières équations du système (5.53) et en $O(h)$ pour les deux dernières.

On a encore dans ce cas une méthode semi discontinue.

Nous allons donner maintenant un théorème de majoration d'erreur, dans le cas où les intégrales sont calculées de façon exacte. Nous avons besoin pour cela du résultat technique suivant :

Lemme 5.2 : On choisit les matrices M_i , $0 \le i \le I$, comme en (5.41). Soit $(u_h, v_h) \in W_h$ la solution du problème (5.39). On a alors la majoration ; pour tout $(\varphi, \psi) \in W_h$

$$(5.54) \quad |u_h - \varphi|^2_{L^2(0,1)} + |v_h - \psi|^2_{L^2(0,1)} \le$$

$$\le - \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((u-\varphi) \frac{d}{dx}(u_h - \varphi) + (v-\psi) \frac{d}{dx}(v_h - \psi) \right) dx +$$

$$+ \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((u-\varphi)(u_h - \varphi) + (v-\psi)(v_h - \psi) \right) dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I-1} \left(v(x_i) - \tfrac{1}{2}(\psi_i^+ + \psi_i^-) \right) \left(u_i^+ - \varphi_i^+ - u_i^- + \varphi_i^- \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I-1} \left(u(x_i) - \tfrac{1}{2}(\varphi_i^+ + \varphi_i^-) \right) \left(v_i^+ - \psi_i^+ - v_i^- + \psi_i^- \right) +$$

$$+ \left(v(x_0) - \psi_0^+ \right) \left(u_0^+ - \varphi_0^+ \right) + \left(\psi_I^- - v(1) \right) \left(u_I^- - \varphi_I^- \right)$$

où, pour toute fonction g , on a posé

$$g(x_i^+) = g_i^+ \qquad \text{et} \qquad g(x_i^-) = g_i^- \qquad 0 \le i \le I \ .$$

Démonstration : On utilise le Lemme 4.3 et la Remarque 4.3. Tout d'abord, la constante C_0 du membre de gauche de l'inégalité (4.17) est ici égale à 2. D'autre part, on a

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } \quad 1 \le i \le I-1 \ ,$$

$$M_0 + M_0^* = M_I + M_I^* = 0$$

Les termes de bord du membre de gauche de l'inégalité (4.17) sont donc ici nuls. Pour écrire le membre de droite de l'inégalité, on utilise l'expression (4.22) dans laquelle on remplace B_S par :

$B_i = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, suivant que la matrice B_i est considérée comme étant définie pour $x = x_i + 0$ ou pour $x = x_i - 0$, et $M_\leq$ par

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad 1 \leq i \leq I-1 , \quad M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Remarque 5.2 : Lorsqu'on utilise les formules (5.42) pour calculer les intégrales, on peut montrer en utilisant les mêmes techniques que dans le Chapitre II que le Lemme 5.2 reste valable si on ajoute au second membre de l'inégalité (5.54) les deux termes perturbateurs suivants :

$$(5.55) \quad \int_0^1 f(u_h - \varphi)\, dx - \sum_{i=0}^{I-1} \frac{h}{2} \left(f(u_h - \varphi)(x_i) + f(u_h - \varphi)(x_{i+1}) \right)$$

$$(5.56) \quad \int_0^1 \left(\varphi(u_h - \varphi) + \psi(v_h - \psi) \right) dx - \sum_{i=0}^{I-1} \frac{h}{2} \left(\left(\varphi(u_h - \varphi) + \psi(v_h - \psi) \right)(x_i) + \left(\varphi(u_h - \varphi) + \psi(v_h - \psi) \right)(x_{i+1}) \right)$$

Le terme perturbateur (5.56) est nul lorsque $k = l = 0$

Théorème 5.3 : On suppose que les matrices M_i , $0 \leq i \leq I$, sont choisies comme en (5.41) et que les intégrales sont calculées exactement. Soient $(u_h, v_h) \in W_h$ la solution du problème (5.39) et $u \in H^3(0,1)$ la solution du problème (5.34), (5.35). On a alors, pour $k = 0$, $l = 0$ et pour $k = 1$, $l = 0$ la majoration suivante :

$$(5.57) \quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} + \left| \frac{du}{dx} - v_h \right|_{L^2(0,1)} \leq C h^{1/2} \|u\|_{H^3(0,1)} .$$

Dans le cas où $k = 0$, $l = 1$, on a :

$$(5.58) \quad |u - u_h|_{L^2(0,1)} + \left| \frac{du}{dx} - v_h \right|_{L^2(0,1)} \leq C h \|u\|_{H^3(0,1)} .$$

Démonstration : On considère d'abord le cas où $k = l = 0$. Pour toute fonction w continue sur $[0,1]$, on appellera $\Pi_h w$ l'élément de dont la restriction à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ est égale à $w(x_{i+1/2})$ avec $x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, $0 \leq i \leq I-1$.

Dans l'inégalité (5.54) on remplace φ et ψ par $\Pi_h \varphi$ et $\Pi_h \psi$. On a :

$$(5.59)\quad |u_h - \Pi_h u|^2_{L^2(\Omega)} + |v_h - \Pi_h v|^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big((u - \Pi_h u)(u_h - \Pi_h u) + (v - \Pi_h v)(v_h - \Pi_h v) \Big) dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I-2} \big(E_i(u) - E_{i+1}(u) \big) \big(v_{i+1/2} - v(x_{i+1/2}) \big) + \sum_{i=0}^{I-1} \big(E_i(v) - E_{i+1}(v) \big) \big(u_{i+1/2} - u(x_{i+1/2}) \big) +$$

$$+ E_1(u) \big(v(x_{1/2}) - v_{1/2} \big) + E_{I-1}(u) \big(v_{I-1/2} - v(x_{I-1/2}) \big) \ ,$$

où on a posé :

$$E_i(\varphi) = \varphi(x_i) - \tfrac{1}{2} \big(\varphi(x_{i+1/2}) + \varphi(x_{i-1/2}) \big) \quad , \ 1 \leq i \leq I-1$$

$$E_0(\varphi) = \varphi(x_0) - \varphi(x_{1/2}) \quad ,$$

$$E_I(\varphi) = \varphi(x_I) - \varphi(x_{I-1/2}) \quad .$$

On montre aisément que :

$$E_i(\varphi) - E_{i+1}(\varphi) = 0 \quad \text{, pour tout } \varphi \in P_2 \text{ , pour } 1 \leq i \leq I-2 ,$$

$$E_0(\varphi) - E_1(\varphi) = 0 \ , \ E_{I-1}(\varphi) - E_I(\varphi) = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in P_0 ,$$

$$E_i(\varphi) = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in P_1 \ , \ 1 \leq i \leq I-1 \quad .$$

En passant par l'intervalle de référence et en utilisant le Lemme 0.3, on en déduit les inégalités :

$$(5.60)\quad |E_i(\varphi) - E_{i+1}(\varphi)| \leq c\, h^{s-1/2} \, |\varphi|_{s,2,(x_{i-1},x_{i+2})} \ ,$$

pour tout $\varphi \in H^s(x_{i-1}, x_{i+2})$, avec $s = 1$ ou 2 , pour $1 \leq i \leq I-2$,

$$(5.61)\quad |E_0(\varphi) - E_1(\varphi)| \leq c\, h\, |\varphi|_{1,\infty,(0,1)} \text{ , pour tout } \varphi \in W^{1,\infty}(0,1)$$

$$(5.62)\quad |E_{I-1}(\varphi) - E_I(\varphi)| \leq c\, h\, |\varphi|_{1,\infty,(0,1)} \text{ , pour tout } \varphi \in W^{1,\infty}(0,1)$$

$$(5.63)\quad |E_i(\varphi)| \leq c\, h^{3/2} \, |\varphi|_{2,2,(x_{i-1},x_{i+1})} \text{, pour tout } \varphi \in H^2(x_{i-1}, x_{i+1}) \ ,$$

pour $1 \leq i \leq I-1$.

D'autre part, on vérifie que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi - \Pi_h \varphi)\, w_h \, dx = 0 \qquad \text{pour tout } \varphi \in P_1 \qquad \text{et tout } w_h \in P_0$$

On en déduit que

$$(5.64) \qquad \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi - \Pi_h \varphi)\, w_h \, dx \right| \leq c\, h^s |\varphi|_{s,2,(x_i,x_{i+1})} |w_h|_{L^2(x_i,x_{i+1})} ,$$

pour tout $\varphi \in H^s(x_i, x_{i+1})$, $s = 1$ ou 2 , pour $0 \leq i \leq I-1$

Enfin, on a

$$(5.65) \qquad h \sum_{i=0}^{I-1} \left(w_{i+1/2}\right)^2 = |w_h|^2_{L^2(0,1)} ,$$

où $w_{i+1/2}$ est la valeur de w_h sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq I-1$.

En combinant les relations (5.59) à (5.65), et en utilisant l'inclusion

$H^2(0,1) \subset W^{1,\infty}(0,1)$, on obtient la majoration :

$$(5.66) \qquad |u_h - \Pi_h u|_{L^2(0,1)} + |v_h - \Pi_h v|_{L^2(0,1)} \leq c\, h^{1/2} \|u\|_{H^3(0,1)} .$$

D'autre part, on a :

$$(5.67) \qquad |\varphi - \Pi_h \varphi|_{L^2(0,1)} \leq c\, h \|\varphi\|_{H^1(0,1)} , \text{ pour tout } \varphi \in H^1(0,1)$$

Des inégalités (5.66) et (5.67), on déduit la majoration (5.57).

Nous allons considérer maintenant le cas où $k = 0$, $l = 1$

Pour toute fonction w continue sur $[0,1]$, on appelle $r_h w$ la fonction continue dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est la P_1-interpolée de w sur $[x_i, x_{i+1}]$, égale à w aux points x_i et x_{i+1} .

Dans l'inégalité (5.54), on remplace φ par $\Pi_h u$ et ψ par $r_h v$. On a

$$(5.68)\qquad |u_h - \Pi_h u|^2_{L^2(0,1)} + |v_h - r_h v|^2_{L^2(0,1)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big((u - \Pi_h u)(u_h - \Pi_h u) + (v - r_h v)(v_h - r_h v) \Big)\, dx$$

$$+ \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} -(v - r_h v) \frac{d}{dx}(v_h - r_h v)\, dx \quad +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I-1} E_i(u) \Big(v_i^+ - v(x_i) - (v_i^- - v(x_i)) \Big)$$

On peut montrer en raisonnant comme précédemment que :

$$(5.69)\qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi - r_h \varphi)\, w_h\, dx \leq c\, h\, |\varphi|_{1,2,(x_i,x_{i+1})} |w_h|_{L^2(x_i,x_{i+1})} ,$$

$$(5.70)\qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi - r_h \varphi) \frac{dw_h}{dx}\, dx \leq c\, h\, |\varphi|_{2,2,(x_i,x_{i+1})} |w_h|_{L^2(x_i,x_{i+1})} ,$$

pour tout $\varphi \in H^2(x_i, x_{i+1})$, $0 \leq i \leq I-1$, et tout $w_h \in P_1$

D'autre part, on a :

$$(5.71)\qquad h \left(\sum_{i=0}^{I-1} (v_i^+)^2 + \sum_{i=1}^{I} (v_i^-)^2 \right) \leq c\, |v_h|^2_{L^2(0,1)} .$$

On montre aussi que :

$$(5.72)\qquad |\varphi - r_h \varphi|_{L^2(0,1)} \leq c\, h\, \|\varphi\|_{H^1(0,1)} , \text{ pour tout } \varphi \in H^1(0,1)$$

En combinant les inégalités et égalités (5.65), et (5.67) à (5.72), on obtient la majoration (5.58).

Enfin, lorsque $k = 1$, $l = 0$, on remplace dans l'inégalité (5.54) φ par $r_h \varphi$ et ψ par $\Pi_h \psi$. On a alors :

$$(5.73)\quad |u_h - r_h u|^2_{L^2(0,1)} + |v_h - \Pi_h v|^2_{L^2(0,1)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big((u - r_h u)(u_h - r_h u) + (v - \Pi_h v)(v_h - \Pi_h v) \Big)\, dx +$$

$$+ \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} -(u - r_h u) \frac{d}{dx}(u_h - r_h u)\, dx \quad +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I-1} E_i(v) \Big(u_i^+ - u(x_i) - (u_i^- - u(x_i)) \Big) \quad +$$

$$+ \Big(v(x_0) - v(x_{1/2}) \Big)\Big(u_0^+ - u(0) \Big) + \Big(v(x_{I-1/2}) - v(1) \Big)\Big(u_I^- - u(1) \Big) \ .$$

En utilisant les relations (5.65), (5.67), (5.69) à (5.73), on déduit la majoration (5.57).

Remarque 5.3 : Lorsque $k = \ell = 0$ et $k = 1, \ell = 0$ on ne peut pas obtenir une erreur d'ordre supérieur à $h^{1/2}$ à cause de la discrétisation des termes de bord.

Lorsque $k = 1$, $\ell = 0$, on peut obtenir une erreur en $O(h)$ si on cherche la solution (u_h, v_h) dans l'espace $W_{h,0}$ défini en (5.50). En effet, dans ce cas les deux derniers termes du membre de droite de l'inégalité (5.73) disparaissent.

Remarque 5.4 : Lorsqu'on utilise les formules (5.42) pour calculer les intégrales, les résultats du Théorème (5.3) sont toujours valables, et dans le cas où $k = 0$, $\ell = 1$, on obtient même une majoration en $O(h^{3/2})$.

CHAPITRE II

UTILISATION DE FORMULES DE QUADRATURE APPROCHEE POUR LES METHODES D'ELEMENTS FINIS DECRITES AU CHAPITRE PRECEDENT

Pour calculer la solution u_h du problème approché (2.7), lorsque l'espace de dimension finie V_h est construit, comme dans le Chapitre précédent, au moyen des éléments finis décrits au Chapitre 0, on est amené à résoudre des systèmes linéaires, dont les coefficients sont des intégrales sur le domaine Ces intégrales sont en pratique calculées élément par élément, et le plus souvent, pour des raisons exposées brièvement au paragraphe II.1, on utilise des formules de quadrature approchée.

Le but de ce Chapitre est d'examiner l'influence de l'utilisation de ces formules de quadrature sur la précision des méthodes d'éléments finis décrites au Chapitre I (pour un travail similaire dans le cas des problèmes paraboliques, voir [40]). Le plan du Chapitre est le suivant :

1) Introduction des formules de quadrature approchées, et majoration générale abstraite de l'erreur.

2) Résultats sur la précision des formules de quadrature et majoration de l'erreur dans le cas des éléments simpliciaux et quadrilatéraux.

3) Au troisième paragraphe, on montre un résultat de super-convergence lorsque le domaine Ω est un parallélotope à côté parallèles aux axes.

II.1 - Utilisation de formules de quadrature : Définitions et majorations abstraites.

Dans ce Chapitre, on considère comme au Chapitre II, paragraphe 3 un ouvert polyédrique borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$. Soit $\mathcal{C}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$, de classe C^0 , en éléments finis de diamètre inférieur à h. On suppose dans toute la suite de ce Chapitre que la famille de triangulations $(\mathcal{C}_h)$ est régulière (définition (0.7)). Ceci entraîne en particulier que chaque élément fini (K, Σ_K, P_K) , $K \in \mathcal{C}_h$, est l'image par une transformation isoparamétrique inversible F_K (affine lorsque l'élément K est un n-simplexe ou un parallélotope, ou bien appartenant à $(Q_1)^2$ lorsque l'élément K est un quadrilatère convexe en dimension $n=2$) d'un élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$. D'autre part, les conclusions des Lemmes 0.7 à 0.12 sont valables. Si on suppose de plus que l'inclusion

$$\hat{P} \subset C^{k+1}(\hat{K})$$

est satisfaite pour un entier $k \geq 1$, on a aussi l'inclusion

$$P_K \subset C^{k+1}(K) \text{ , pour tout } K \in \mathcal{C}_h \text{ .}$$

Enfin on peut toujours supposer que le jacobien J_K de la transformation F_K est strictement positif.

On note J_S le jacobien de la restriction de la transformation F_K à une face quelconque S de l'élément $K \in \mathcal{C}_h$, et $\partial\mathcal{C}_h$ l'ensemble des éléments K de $\mathcal{C}_h$ ayant une face S incluse dans $\partial\Omega$.

Pour $u, v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, on définit les formes bilinéaires :

$$a(u,v) = \frac{1}{2}\left((Au,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (u, A^*v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) , \tag{1.1}$$

$$b(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (Mu, v)\, ds \text{ .} \tag{1.2}$$

Alors si la solution u du problème (I.1.1), (I.1.2) appartient à l'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on a :

$$a(u,v) + b(u,v) = (f,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \text{ , pour tout } v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ .} \tag{1.3}$$

A la triangulation $\mathcal{C}_h$, on associe, comme dans le Chapitre 0 un sous-

espace X_h de $\left(H^1(\Omega)\right)^p$ et on considère comme en (I.2.7) le problème approché : Trouver $u_h \in X_h$ tel que

$$(1.4) \qquad a(u_h, v_h) + b(u_h, v_h) = (f, v_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \text{ pour tout } v_h \in X_h$$

En pratique, les intégrales intervenant dans les formes bilinéaires $a(.,.)$ et $b(.,.)$, ainsi qu'au second membre de l'égalité (1.4) sont rarement calculées de façon exacte, soit parce que les matrices $A_i(x)$, $0 \le i \le n$ et $M(x)$, ou le second membre f n'ont pas une expression analytique simple, soit parce que ces quantités ne sont connues (par l'intermédiaire de mesures physiques) qu'en un certain nombre de points du domaine $\overline{\Omega}$.

Pour calculer ces intégrales de façon approchée, on se donne :

(i) Une formule de quadrature sur l'élément fini de référence $\hat{K}$

$$(1.5) \qquad \int_{\hat{K}} \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x} \simeq \sum_{\ell=1}^{N} \hat{\omega}_\ell \hat{f}(\hat{b}_\ell) ,$$

où $\hat{\omega}_\ell \in \mathbb{R}$, $\hat{b}_\ell \in \hat{K}$, $1 \le \ell \le N$.

(ii) Une formule de quadrature sur une face $\hat{S}$ de dimension $(n-1)$ de $\hat{K}$

$$(1.6) \qquad \int_{\hat{S}} \hat{g}(\hat{s})\, d\hat{s} \simeq \sum_{\ell=1}^{L} \hat{\omega}'_\ell \hat{g}(\hat{b}'_\ell) ,$$

où $\hat{\omega}'_\ell \in \mathbb{R}$, $\hat{b}'_\ell \in \hat{S}$, $1 \le \ell \le L$.

Aux formules de quadrature (1.4) et (1.5), on associe les fonctionnelles d'erreur suivantes :

$$(1.7) \qquad \hat{E}(\hat{f}) = \int_{\hat{K}} \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x} - \sum_{\ell=1}^{N} \hat{\omega}_\ell \hat{f}(\hat{b}_\ell) ,$$

$$(1.8) \qquad \hat{E}'(\hat{g}) = \int_{\hat{S}} \hat{g}(\hat{s})\, d\hat{s} - \sum_{\ell=1}^{L} \hat{\omega}'_\ell \hat{g}(\hat{b}'_\ell) .$$

Etant donné $K \in \mathcal{C}_h$ et une face S de dimension $(n-1)$ de K, on a

$$(1.9) \qquad \int_K f(x)\, dx = \int_{\hat{K}} \hat{f}(\hat{x}) J_K(\hat{x})\, d\hat{x} ,$$

$$(1.10) \qquad \int_S g(s)\, ds = \int_{\hat{S}} \hat{g}(\hat{s}) J_S(\hat{s})\, d\hat{s} ,$$

De la sorte, aux formules de quadrature (1.7) et (1.8) correspondent sur K et S les formules de quadrature suivantes :

$$(1.11) \qquad \int_K f(x)\,dx \simeq \sum_{\ell=1}^{N} \omega_{\ell,K}\, f(b_{\ell,K}) \quad ,$$

avec : $\omega_{\ell,K} = J_K(\hat{b}_\ell)\,\hat{\omega}_\ell$, $b_{\ell,K} = F_K(\hat{b}_\ell)$, $1 \le \ell \le N$,

$$(1.12) \qquad \int_S g(\sigma)\,d\sigma \simeq \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,S}\, g(b_{\ell,S}) \quad ,$$

avec : $\omega_{\ell,S} = J_S(\hat{b}'_\ell)\,\hat{\omega}'_\ell$, $b_{\ell,S} = F_K(\hat{b}'_\ell)$, $1 \le \ell \le L$.

On définit les fonctionnelles d'erreur sur K et S par

$$(1.13) \qquad E_K(f) = \int_K f(x)\,dx - \sum_{\ell=1}^{N} \omega_{\ell,K}\, f(b_{\ell,K}) \quad ,$$

$$(1.14) \qquad E_S(g) = \int_S g(\sigma)\,d\sigma - \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,S}\, g(b_{\ell,S}) \quad ,$$

qui sont liées aux fonctionnelles d'erreur sur $\hat{K}$ et $\hat{S}$ par les relations

$$(1.15) \qquad E_K(f) = \hat{E}(J_K \hat{f}) \quad ,$$

$$(1.16) \qquad E_S(g) = \hat{E}(J_S \hat{g}) \quad .$$

Dans toute la suite, on supposera que les poids $\hat{\omega}_\ell$ (donc aussi $\omega_{\ell,K}$, $K \in \mathcal{G}_R$), $1 \le \ell \le N$ et les poids $\hat{\omega}'_\ell$ (donc aussi $\omega_{\ell,K}$, $K \in \mathcal{G}_R$), $1 \le \ell \le L$, sont strictement positifs.

Lorsqu'on utilise les formules (1.11) et (1.12) pour calculer les intégrales, le problème approché se formule de la façon suivante :
Trouver $u_R^* \in X_R$, tel que :

$$(1.17) \qquad a_R(u_R^*, v_R) + b_R(v_R, v_R) = (f, v_R)_R \quad , \text{ pour tout } v_R \in X_R ,$$

où les formes bilinéaires $a_R(.,.)$, $b_R(.,.)$ et le produit scalaire $(.,.)_R$ sont définis par :

$$(1.18)\qquad (u,v)_h = \sum_{K\in\mathcal{E}_h}\sum_{\ell=1}^{N} \omega_{\ell,K}(u,v)(b_{\ell,K}) \qquad \text{pour tout } u,v \in \prod_{K\in\mathcal{E}_h}(C^0(K))^\ell,$$

$$(1.19)\qquad a_h(u,v) = \frac{1}{2}\left((Au,v)_h + (u,A^*v)_h\right) \qquad \text{pour tout } u,v \in \prod_{K\in\mathcal{E}_h}(C^1(K))^\ell,$$

$$(1.20)\qquad b_h(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{S\subset\partial\Omega}\sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,S}(Mu,v)(b_{\ell,S}) \qquad \text{pour tout } u,v \in \prod_{K\in\partial\mathcal{E}_h}(C^0(K))^\ell,$$

La forme bilinéaire $a_h(.,.)$ sur $X_h \times X_h$ a un sens évident lorsque l'on a l'inclusion $X_h \subset (C^1(\bar\Omega))^p$. Lorsque cette inclusion n'est pas satisfaite, l'expression (1.19) a toujours un sens car $a_h(u,v)$ représente une somme d'intégrales sur chaque élément K, calculées en utilisant la formule de quadrature (1.11).

On se pose les problèmes suivants : Comment choisir les formules de quadrature sur l'élément fini de référence $\hat K$ et sur une face quelconque $\hat S$ de dimension $n-1$ de $\hat K$ pour que :

(i) le problème (1.17) admette une solution unique $u_h \in X_h$,

(ii) $\lim_{h\to 0} |u_h^* - u|_{L^2(\Omega)} = 0$

(iii) l'erreur $u_h^* - u$ soit du même ordre que l'erreur $u_h - u$ correspondant à la méthode d'éléments finis (1.4), où les intégrales sont calculées de façon exacte.

En se plaçant tout d'abord dans un cadre abstrait, et en utilisant certaines hypothèses générales, comme au Chapitre I, §.2, on va obtenir des résultats de convergence et de majoration de l'erreur.
On considère donc maintenant deux formes bilinéaires $a_h(.,.)$ et $b_h(.,.)$ définies sur l'espace $V_h \times V_h$ et une forme linéaire $v_h \longrightarrow (f,v_h)_h$ définie sur V_h.

On a les majorations d'erreur suivantes.

Théorème 1.1 : On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$(1.21)\qquad a_h(v_h,v_h) \geqslant \alpha |v_h|^2_{L^2(\Omega)}, \text{ et que}$$

$$(1.22)\qquad b_h(v_h,v_h) \geqslant 0, \text{ pour tout } v_h \in V_h.$$

Alors la solution u_h^* du problème (1.3) vérifie l'inégalité

$$(1.23)\quad |u-u_h^*|_{L^2(\Omega)} \le C\left\{\inf_{v_h\in X_h}\left(\|u-v_h\|_{H^1(\Omega)}+\sup_{w\in X_h}\frac{\left|\int_{\partial\Omega}((B-M)(u-v_h),w)\,ds\right|}{|w|_{L^2(\Omega)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sup_{w\in X_h}\left|\frac{a(v_h,w)-a_h(v_h,w)}{|w|_{L^2(\Omega)}}\right|+\sup_{w\in X_h}\left|\frac{b(v_h,w)-b_h(v_h,w)}{|w|_{L^2(\Omega)}}\right|\right)+\sup_{w\in X_h}\left|\frac{(f,w)_{L^2(\Omega)}-(f,w)_h}{|w|_{L^2(\Omega)}}\right|\right\}$$

où la constante C ne dépend que de α, des matrices A_i, $0\le i\le n$.
Si on suppose de plus qu'il existe une constante β telle que

$$(1.24)\qquad b_h(v_h,v_h) \ge \beta |v_h|^2_{L^2(\partial\Omega)}\ ,$$

On a la majoration :

$$(1.25)\quad |u-u_h^*|_{L^2(\Omega)}+|u-u_h^*|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\left\{\inf_{v_h\in X_h}\left(\|u-v_h\|_{H^1(\Omega)}+|u-v_h|_{L^2(\partial\Omega)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sup_{w\in X_h}\left|\frac{a(v_h,w)-a_h(v_h,w)}{|w|_{L^2(\Omega)}}\right|+\sup_{w\in X_h}\left|\frac{b(v_h,w)-b_h(v_h,w)}{|w|_{L^2(\partial\Omega)}}\right|\right)+\sup_{w\in X_h}\frac{|(f,w)_{L^2(\Omega)}-(f,w)_h|}{|w|_{L^2(\Omega)}}\right\}$$

où la constante C ne dépend que de α, β, des matrices A_i, $0\le i\le n$.

Démonstration : Les hypothèses (1.21) et (1.22) impliquent que le problème (1.17) a une solution unique $u_h^*\in X_h$. Soit maintenant un élément quelconque $v_h\in X_h$ et soit $w=u_h-v_h$. On a, d'après les égalités (1.3) et (1.17) :

$$(1.26)\quad a_h(w,w)+b_h(w,w)=(f,w)_h-(f,w)_{L^2(\Omega)}+(A(u-v_h),w)_{L^2(\Omega)}+$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_{\partial\Omega}((M-B)(u-v_h),w)\,ds+a(v_h,w)-a_h(v_h,w)+b(v_h,w)-b_h(v_h,w)\ .$$

En utilisant les hypothèses (1.21) et (1.22), on peut donc écrire, pour tout $v_h\in X_h$

$$|w|_{L^2(\Omega)} \le C\left(\|u-v_h\|_{H^1(\Omega)}+\sup_{w\in X_h}\frac{\int_{\partial\Omega}((M-B)(u-v_h),w)\,ds}{|w|_{L^2(\Omega)}}+\right.$$

$$\left.+\sup_{w\in X_h}\frac{|a(v_h,w)-a_h(v_h,w)|}{|w|_{L^2(\Omega)}}+\sup_{w\in X_h}\frac{|b(v_h,w)-b_h(v_h,w)|}{|w|_{L^2(\Omega)}}+\sup_{w\in X_h}\frac{|(f,w)_{L^2(\Omega)}-(f,w)_h|}{|w|_{L^2(\Omega)}}\right)$$

On en déduit aisément, grâce à l'inégalité triangulaire, l'inégalité (1.24). A partir de l'égalité (1.26) et des hypothèses (1.21) et (1.24), on peut écrire, pour tout $v_h \in X_h$

$$|w|_{L^2(\Omega)} + |w|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\left(\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + |u - v_h|_{L^2(\partial\Omega)} + \sup_{w \in X_h} \frac{|a(v_h, w) - a_h(v_h, w)|}{|w|_{L^2(\Omega)}} + \right.$$

$$\left. + \sup_{w \in X_h} \frac{|b(v_h, w) - b_h(v_h, w)|}{|w|_{L^2(\partial\Omega)}} + \sup_{w \in X_h} \frac{|(f, w)_{L^2(\Omega)} - (f, w)_h|}{|w|_{L^2(\Omega)}} \right)$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|u - u_h^*|_{L^2(\Omega)} + |u - u_h^*|_{L^2(\partial\Omega)} \leq |w|_{L^2(\Omega)} + |w|_{L^2(\partial\Omega)} + |u - v_h|_{L^2(\Omega)} + |u - v_h|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Les deux dernières inégalités entraînent la majoration (1.25).

A partir de l'inégalité (1.23), il est possible d'établir un résultat général de convergence de la solution approchée $u_h^* \in X_h$ vers la solution exacte u lorsque h tend vers zéro. Pour cela, on introduit, comme au Chapitre I, l'espace

$$(1.27) \qquad W = \{ u \in H^1(\Omega) \ ; \ (B - M)u|_{\partial\Omega} = 0 \} \ .$$

Théorème 1.2 : On suppose que les hypothèses (1.21) et (1.22) sont satisfaites, pour une constante $\alpha > 0$, indépendante de h, et que la solution u du problème (I.1.1), (I.1.2) appartient à l'espace $H^1(\Omega)$. On suppose d'autre part qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V}$ de W, dense dans W, et une application $r_h : \mathcal{V} \longrightarrow X_h$ tels que :

$$(1.28) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \ , \quad \lim_{h \to 0} \|v - r_h v\|_{H^1(\Omega)} = 0 \ ,$$

$$(1.29) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \ , \quad \lim_{h \to 0} \sup_{w \in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |v - r_h v||w| \, ds}{|w|_{L^2(\Omega)}} = 0 \ ,$$

$$(1.30) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \ , \quad \lim_{h \to 0} \sup_{w \in X_h} \frac{|a(r_h v, w) - a_h(r_h v, w)|}{|w|_{L^2(\Omega)}} = 0 \ ,$$

$$(1.31) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \ , \quad \lim_{h \to 0} \sup_{w \in X_h} \frac{|b(r_h v, w) - b_h(r_h v, w)|}{|w|_{L^2(\Omega)}} = 0 \ ,$$

et que :

$$\lim_{h\to 0} \sup_{w\in X_h} \frac{|(f,w)_{L^2(\Omega)} - (f,w)_h|}{|w|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} = 0 \quad . \tag{1.32}$$

Alors la solution $u_h^* \in X_h$ du problème (1.17) converge vers la solution exacte $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ du problème (I.1.1), (I.1.2), c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0} |u - u_h^*|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0 \tag{1.33}$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit. On choisit $v \in \mathcal{V}$ tel que :

$$\|u - v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{8C}$$

où C est la constante qui apparaît dans l'inégalité (1.23).
On choisit ensuite $h \leq h_0(\varepsilon)$ assez petit pour que :

$$\|v - r_h v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{8C} \quad)$$

$$\sup_{w\in X_h} \frac{\int_{\partial\Omega} |v - r_h v|\,|w|\,ds}{|w|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \leq \frac{\varepsilon}{4C} \quad)$$

$$\sup_{w\in X_h} \frac{|a(r_h v, w) - a_h(r_h v, w)|}{|w|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} + \sup_{w\in X_h} \frac{|b(r_h v, w) - b_h(r_h v, w)|}{|w|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \leq \frac{\varepsilon}{4C} \quad)$$

$$\sup_{w\in X_h} \frac{|(f,w)_{L^2(\Omega)} - (f,w)_h|}{|w|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \leq \frac{\varepsilon}{4C} \quad .$$

Si dans l'inégalité (1.23) on choisit $v_h = r_h v$, on a pour $h \leq h_0(\varepsilon)$

$$|u - u_h^*|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \varepsilon \quad) \tag{1.34}$$

ce qui entraîne la convergence.

Remarque 1.1 : Les conditions de positivité (1.21) et (1.22) jouent le rôle de conditions de stabilité et les hypothèses (1.28) à (1.32) jouent le rôle de conditions de consistance.

Considérons maintenant plus particulièrement les formes bilinéaires $a_h(.,.)$ et $b_h(.,.)$, et la forme linéaire $v \longrightarrow (f, v)_h$ données respectivement par les formules (1.19), (1.20) et (1.18).

L'hypothèse (1.21) est satisfaite si l'on peut vérifier que, pour tout $v_h \in V_h$, on a :

$$(1.35)\quad \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{\ell=1}^{N} \omega_{\ell,K} \left((A + A^*) v, v \right)(b_{\ell,K}) \geq \alpha \, |v|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Pour cela, il suffit que pour tout $K \in \mathcal{C}_h$ et pour tout $p \in (P_K)^p$, on ait

$$(1.36)\quad \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{N} \omega_{\ell,K} \left((A + A^*) p, p \right)(b_{\ell,K}) \geq \alpha \, |p|^2_{L^2(K)} .$$

De même, les hypothèses (1.22) et (1.24) sont satisfaites si on peut vérifier que pour tout $v \in V_h$, on a respectivement les inégalités :

$$(1.37)\quad \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,S} \left((M + M^*) v, v \right)(b_{\ell,S}) \geq 0 ,$$

$$(1.38)\quad \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,S} \left((M + M^*) v, v \right)(b_{\ell,S}) \geq \beta \, |v|^2_{L^2(S)} .$$

Enfin, pour évaluer les quantités :

$$a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h) = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{C}_h} E_K \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left((A_i(x) \frac{\partial v_h}{\partial x_i}, w_h) - (v_h, \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x) w_h) \right) + \left((A_0 + A_0^*) v_h, w_h \right) \right\},$$

$$b(v_h, w_h) - b_h(v_h, w_h) = \frac{1}{2} \sum_{S \subset \partial\Omega} E_S \left((M v_h, w_h) \right) ,$$

$$(f, w_h)_{L^2(\Omega)} - (f, w_h)_h = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} E_K \left((f, w_h) \right) ,$$

on est amené à majorer dans chaque élément fini $K \in \mathcal{C}_h$ les expressions :

$$(1.39)\quad E_K\left(v \frac{\partial p}{\partial x_i} q\right) , \; E_K\left(v p \frac{\partial q}{\partial x_i}\right) , \; E_K(vpq) , \; E_K(fq) , \quad p, q \in P_K$$

en fonction de $|q|_{L^2(K)}$, et l'expression :

$$(1.40)\quad E_S(vpq) , \quad p, q \in P_K$$

en fonction de $|q|_{L^2(K)}$, ou de $|q|_{L^2(S)}$.

II.2 - Utilisation de formules de quadrature : Majorations d'erreur

Nous reprenons ici les notations du paragraphe précédent ; nous donnons des conditions suffisantes pour que les inégalités (1.37) et (1.38), ou (1.40), soient vérifiées, ainsi que des majorations des fonctionnelles d'erreurs (1.41) et (1.42). Ces résultats permettent, en utilisant le Théorème 1.1, de majorer l'erreur $|u-u_h^*|_{L^2(\Omega)}$ en fonction de h

On fait les hypothèses suivantes :

Les formules de quadrature (1.5) et (1.6) vérifient les inégalités :

$$(2.1)\qquad \sum_{\ell=1}^{N} \hat{\omega}_\ell \left|\hat{P}(\hat{b}_\ell)\right|^2 \geq \hat{c}\,|\hat{P}|^2_{L^2(\hat{K})} \quad ,$$

$$(2.2)\qquad \sum_{\ell=1}^{L} \hat{\omega}'_\ell \left|\hat{P}(\hat{b}'_\ell)\right|^2 \geq \hat{c}\,|\hat{P}|^2_{L^2(\hat{S})} \quad ,$$

pour tout $\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}}$, où $\hat{c}$ est une constante > 0

Lemme 2.1 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω . On suppose que l'opérateur A est positif, que les hypothèses (I.1.3) et (2.1) sont satisfaites. Alors les hypothèses (1.21) et (1.22) sont vérifiées, c'est-à-dire que l'on a :

$$(2.3)\qquad a_h(v,v) \geq \alpha\,|v|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \text{pour tout } v \in V_h \ ,$$

où α est une constante > 0 indépendante de h, et :

$$(2.4)\qquad b_h(v,v) \geq 0 \qquad \text{pour tout } v \in V_h$$

Si on suppose de plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que la matrice $M+M^* - cI$ soit semi définie positive et que l'hypothèse (2.2) soit satisfaite, alors l'hypothèse (1.24) est vérifiée, c'est-à-dire que l'on a :

$$(2.5)\qquad b_h(v,v) \geq \beta\,|v|^2_{L^2(\partial\Omega)} \qquad \text{pour tout } v \in V_h$$

où β est une constante > 0 indépendante de h .

Démonstration : L'opérateur A étant positif, on a pour tout $v \in V_h$

$$(2.6) \quad a_h(v,v) = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{\ell=1}^{N} \omega_{\ell,K} \big((A+A^*)v, v\big)(b_{\ell,K}) \geq \frac{c_0}{2} \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{\ell=1}^{N} \omega_{\ell,K} |v(b_{\ell,K})|^2 ,$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. On a d'autre part :

$$\sum_{\ell=1}^{N} \omega_{\ell,K} |v(b_{\ell,K})|^2 = \sum_{\ell=1}^{N} \hat{\omega}_\ell \, J_K(\hat{b}_\ell) |\hat{v}(\hat{b}_\ell)|^2 .$$

En utilisant l'hypothèse (2.1) et le Lemme 0.7, on en déduit l'inégalité :

$$(2.7) \quad \sum_{\ell=1}^{N} \omega_{\ell,K} |v(b_{\ell,K})|^2 \geq \hat{c} \inf J_K |\hat{v}|^2_{L^2(\hat{K})} \geq \hat{c} \frac{\inf J_K}{\sup J_K} |v|^2_{L^2(K)} .$$

L'expression $\frac{\inf J_K}{\sup J_K}$ est minorée d'après le Lemme 0.7, par une constante indépendante de h, et en sommant les inégalités (2.7) pour tous les éléments $K \in \mathcal{C}_h$, on obtient l'inégalité (2.3).

D'après les hypothèses I.1.3, on a, puisque les poids $\omega_{\ell,S}$ sont positifs, pour $1 \leq \ell \leq L$, et pour tout $S \subset \partial\Omega$:

$$(2.8) \quad b_h(v,v) = \frac{1}{4} \sum_{S \subset \partial\Omega} \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,S} \big((M+M^*)v, v\big)(b_{\ell,S}) \geq 0 , \quad \forall v \in V_h ,$$

c'est-à-dire l'inégalité (2.4).

Supposons maintenant que la matrice $M+M^*-cI$ est semi définie positive. On a alors :

$$\sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,S} \big((M+M^*)v, v\big)(b_{\ell,S}) \geq c \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,S} |v(b_{\ell,S})|^2 .$$

D'autre part, on a, d'après le Lemme 0.8 :

$$\sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,S} |v(b_{\ell,S})|^2 = \sum_{\ell=1}^{L} \hat{\omega}'_\ell \, J_S(\hat{b}'_\ell) |\hat{v}(\hat{b}'_\ell)|^2 \geq \hat{c} (\inf J_S) |\hat{v}|^2_{L^2(\hat{S})} \geq \hat{c} \frac{\inf J_S}{\sup J_S} |v|^2_{L^2(S)} .$$

En sommant cette inégalité pour toutes les faces S incluses dans $\partial\Omega$, et en utilisant le Lemme 0.7, on obtient l'inégalité (2.5).

Remarque 2.1 : Les inégalités (2.1) et (2.4) sont trivialement satisfaites si les formules de quadrature (1.5) et (1.6) sont exactes pour les fonctions de la forme $\hat{q} = (\hat{p})^2$, pour tout $\hat{p} \in \hat{P}$.

Remarque 2.2 : Les poids des formules de quadrature étant strictement positifs, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) L'hypothèse (2.1) (resp.(2.4)) est satisfaite.

(ii) L'ensemble de points $\{\hat{b}_\ell\}_{\ell=1}^{N}$ (resp. $\{\hat{b}'_\ell\}_{\ell=1}^{L}$) contient un ensemble $\hat{P}$-unisolvant (resp. $\hat{P}_{\hat{S}}$-unisolvant, où $\hat{P}_{\hat{S}}$ désigne la restriction de l'espace $\hat{P}$ à la face $\hat{S}$).

On rappelle ensuite quelques estimations maintenant classiques : (Cf. CIARLET et RAVIART [8] et CIARLET [5]) des fonctionnelles d'erreur introduites en (1.39). On donne, pour être plus complet, la démonstration de l'une d'entre elles :

Lemme 2.2 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω. On suppose que les inclusions $P_k \subset \hat{P} \subset P_j$, dans le cas des éléments finis simpliciaux, (resp. $Q_k \subset \hat{P} \subset Q_j$, dans le cas des éléments quadrilatéraux), sont satisfaites pour des entiers k et j vérifiant $1 \leq k \leq j$. On suppose d'autre part que la formule de quadrature (1.5) est telle que :

$$\hat{E}(\hat{\varphi}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \hat{\varphi} \in P_{r+j-1} \quad (\text{resp. } Q_{r+j}) \tag{2.9}$$

pour un entier r tel que $1 \leq r \leq k$.

Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que l'on ait :

$$|E_K(v\,p\,w)| \leq C\, h_K^r \, \|v\|_{r,\infty,K} \, \|p\|_{r,2,K} \, |w|_{L^2(K)} \tag{2.10}$$

$$\left|E_K\left(v \frac{\partial p}{\partial x_i} w\right)\right| \leq C\, h_K^r \, \|v\|_{r,\infty,K} \, \|p\|_{r+1,2,K} \, |w|_{L^2(K)}, \quad 1 \leq i \leq n \tag{2.11}$$

pour tout $v \in W^{r,\infty}(\Omega)$, tout $p, w \in P_K$, tout $K \in \mathcal{C}_h$.

$$\left|E_K\, v\, p \frac{\partial w}{\partial x_i}\right| \leq C\, h_K^r \, \|v\|_{r+1,\infty,K} \, \|p\|_{r+1,2,K} \, |w|_{L^2(K)}, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{2.12}$$

pour tout $v \in W^{r+1,\infty}(\Omega)$, tout $p, w \in P_K$, tout $K \in \mathcal{C}_h$.

Démonstration : Nous allons démontrer l'inégalité (2.10). Puisque l'on a $r \geq 1$, l'inclusion $W^{r,\infty}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ est satisfaite et on peut alors écrire :

$$|E_K(v\,p\,w)| = \left|\hat{E}\left(\hat{v}\,\hat{p}\,\hat{w}\,J_K\right)\right| \leq C\, \|\hat{v}\,\hat{p}\|_{r,\infty,\hat{K}} \, |\hat{w}\,J_K|_{L^2(\hat{K})}. \tag{2.13}$$

La forme linéaire $\hat{u} \longrightarrow \hat{E}(\hat{u}\,\hat{w}\,J_K)$ est continue sur $W^{r,\infty}(\hat{K})$ et, d'après (2.9), elle est identiquement nulle pour les polynômes de P_{r-1} dans le cas simplicial (resp. les polynômes de Q_{r-1} dans le cas quadrilatéral) ; on en déduit, d'après le Lemme 0.3, les inégalités :

$$\left|\hat{E}(\hat{u}\,\hat{w}\,J_K)\right| \leq \hat{c}\,|\hat{u}|_{r,\infty,\hat{K}}\,|\hat{w}\,J_K|_{L^2(\hat{K})}\,,$$

resp. $$\left|\hat{E}(\hat{u}\,\hat{w}\,J_K)\right| \leq \hat{c}\,[\hat{u}]_{r,\infty,\hat{K}}\,|\hat{w}\,J_K|_{L^2(\hat{K})}\,.$$

En appliquant la formule de Leibniz, on a :

$$|\hat{v}\,\hat{p}|_{r,\infty,\hat{K}} \leq \sum_{m=0}^{r} C_r^m\,|\hat{v}|_{m,\infty,\hat{K}}\,|\hat{p}|_{r-m,\infty,\hat{K}}\,,$$

$$[\hat{v}\,\hat{p}]_{r,\infty,\hat{K}} \leq \sum_{m=0}^{r} C_r^m\,[\hat{v}]_{m,\infty,\hat{K}}\,[\hat{p}]_{r-m,\infty,\hat{K}}\,,$$

où les C_r^m, $0 \leq m \leq r$, sont les coefficients de la formule du binome. D'autre part, puisque $\hat{p}$ appartient à l'espace de dimension finie $\hat{P}$, on a :

$$|\hat{p}|_{m,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c}\,|\hat{p}|_{m,2,\hat{K}}\,,$$

$$[\hat{p}]_{m,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c}\,[\hat{p}]_{m,2,\hat{K}}\,.$$

En combinant les six dernières inégalités, il vient :

$$\left|\hat{E}(\hat{v}\,\hat{p}\,\hat{w}\,J_K)\right| \leq \hat{c}\left(\sum_{m=0}^{r} |\hat{v}|_{m,\infty,\hat{K}}\,|\hat{p}|_{r-m,2,\hat{K}}\right)|\hat{w}\,J_K|_{L^2(\hat{K})}\,, \tag{2.14}$$

dans le cas simplicial, et

$$\left|\hat{E}(\hat{v}\,\hat{p}\,\hat{w}\,J_K)\right| \leq \hat{c}\left(\sum_{m=0}^{r} [\hat{v}]_{m,\infty,\hat{K}}\,[\hat{p}]_{r-m,2,\hat{K}}\right)|\hat{w}\,J_K|_{L^2(\hat{K})}\,, \tag{2.15}$$

dans le cas quadrilatéral.

Appliquant les Lemmes 0.8 et 0.9 respectivement aux inégalités (2.14) et (2.15), on obtient, dans les cas simpliciaux et quadrilatéraux :

$$\left|E_K(v\,p\,w)\right| \leq c\,\frac{\sup J_K}{\inf J_K}\,h_K^r\left(\sum_{m=0}^{r} |v|_{m,\infty,K}\,|p|_{r-m,2,K}\right)|w|_{L^2(K)}\,,$$

d'où l'on réduit l'inégalité (2.10), d'après le Lemme 0.7. Les inégalités (2.11) et (2.12) se démontrent en raisonnant de façon similaire ([5]).

Du Lemme 2.2, on déduit immédiatement la

Proposition 2.1 : On suppose que les hypothèses du Lemme 2.2 sont satisfaites pour des entiers k, j et r tels que $1 \leq k \leq j$, $1 \leq r \leq k+1$, que les coefficients des matrices A_i , $1 \leq i \leq n$, appartiennent à $W^{r+1,\infty}(\Omega)$ et que les coefficients de la matrice A_0 appartiennent à $W^{r,\infty}(\Omega)$. Alors il existe une constante $C = C(k, j, r, \|A\|_{r+1,\infty,\Omega}, \|A_0\|_{r,\infty,\Omega})$ telle que :

$$(2.16) \quad |a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)| \leq C h^r \Big(\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \|v_h\|^2_{r+1,2,K} \Big)^{1/2} |w_h|_{L^2(\Omega)} ,$$

pour tout $v_h, w_h \in V_h$.

Si dans la démonstration de l'inégalité (2.10) du Lemme 2.2, on remplace K et $\hat{K}$ respectivement par S et $\hat{S}$, on obtient le résultat suivant :

Lemme 2.3 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω . On suppose que les inclusions $P_k \subset \hat{P}_{\hat{s}} \subset P_j$, dans le cas des éléments finis simpliciaux (resp. $Q_k \subset \hat{P}_{\hat{s}} \subset Q_j$, dans le cas des éléments quadrilatéraux), sont satisfaites pour des entiers k et j tels que $1 \leq k \leq j$ On suppose d'autre part que la formule de quadrature (1.6) vérifie :

$$(2.17) \quad \hat{E}(\hat{q}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \hat{q} \in P_{l+j-1} \quad (\text{resp. } \hat{q} \in Q_{l+j})$$

pour un entier l tel que $1 \leq l \leq k+1$.

Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que l'on ait :

$$(2.18) \quad |E_S(vpw)| \leq C h_K^l \|v\|_{l,\infty,S} \|p\|_{l,2,S} |w|_{L^2(S)} ,$$

pour tout $v \in W^{l,\infty}(S)$, $p \in P_K$, $w \in P_K$ pour toute face S de dimension $n-1$ de K , et tout $K \in \mathcal{C}_h$.

Du Lemme 2.3, on déduit la

Proposition 2.2 : On suppose que les hypothèses du Lemme 2.3 sont satisfaites pour des entiers k, j et l tels que $1 \leq k \leq j$, $1 \leq l \leq k+1$ et que les coefficients de la matrice M appartiennent à $W^{l,\infty}(\partial\Omega)$. Alors il existe une constante $C = C(k, j, l, \|M\|_{l,\infty,\partial\Omega})$ telle que :

$$(2.19)\qquad |b(v_h,w_h)-b_h(v_h,w_h)| \le c\,h^{\ell}\Big(\sum_{S\subset\partial\Omega}\|v_h\|^2_{\ell,2,S}\Big)^{1/2}|w_h|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)}\ ,$$

$$(2.20)\qquad |b(v_h,w_h)-b_h(v_h,w_h)| \le c\,h^{\ell-\frac12}\Big(\sum_{S\subset\partial\Omega}\|v_h\|^2_{\ell,2,S}\Big)^{1/2}|w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\ ,$$

pour tout $v_h, w_h \in V_h$.

Démonstration de la proposition 2.2 : On a l'égalité :

$$b(v_h,w_h)-b_h(v_h,w_h) = \frac12\sum_{S\subset\partial\Omega} E_S\big((Mv_h,w_h)\big)\ .$$

D'après le Lemme 2.3, on a, puisque les coefficients de la matrice M appartiennent à $W^{\ell,\infty}(\partial\Omega)$:

$$(2.21)\qquad |E_S\big((Mv_h,w_h)\big)| \le c\,h_K^{\ell}\,\|v_h\|_{\ell,2,S}\,|w_h|_{\mathbb{L}^2(S)}\ ,$$

pour toute face $S\subset\partial K\cap\partial\Omega$, $K\in\partial\mathcal{B}_h$
En sommant les inégalités telles que (2.21) pour toutes les faces S incluses dans $\partial\Omega$, on obtient l'inégalité (2.19).
En utilisant le Lemme 0.10, l'inégalité (2.21) devient :

$$(2.22)\qquad |E_S\big((Mv_h,w_h)\big)| \le c\,h_K^{\ell-\frac12}\,\|v_h\|_{\ell,2,S}\,|w_h|_{\mathbb{L}^2(K)}\ ,$$

pour toute face $S\subset\partial K\cap\partial\Omega$, et tout $K\in\partial\mathcal{B}_h$. En sommant les inégalités telles que (2.22) pour toutes les faces S incluses dans $\partial\Omega$, on obtient l'inégalité (2.20).

Enfin, nous avons besoin du résultat suivant ([5]) dont nous rappelons la démonstration.

Lemme 2.4 : On suppose que les hypothèses du Lemme 2.2 sont satisfaites, pour des entiers k,j et r tels que $1\le r\le k\le j$. Alors il existe une constante $C>0$ indépendante de h telle que, pour tout nombre q vérifiant les inégalités $q\ge 2$, $r-nq<0$ on ait :

$$(2.23)\qquad |E_K(vp)| \le c\,h_K^{r}\,|v|_{r,q,K}\,|p|_{L^2(K)}\ ,$$

pour tout $v\in W^{r,q}(\Omega)$, $p\in P_K$ et $K\in\mathcal{B}_h$.

Démonstration : L'inégalité $n-rq<0$ entraîne que l'inclusion $W^{r,q}(\Omega)\subset C^0(\overline{\Omega})$ est satisfaite. On a donc :

$$|E_K(vp)| \le |\hat E(\hat v\,\hat p\,J_K)| \le \hat c\,\|\hat v\|_{r,q,\hat K}\,|\hat p\,J_K|_{L^{q'}(\hat K)}\ .$$

La forme linéaire $\hat{v} \longrightarrow \hat{E}(\hat{v}\,\hat{p}\,J_K)$ est continue sur $W^{r,q}(\hat{K})$; d'après l'hypothèse (2.9), elle est identiquement nulle pour les polynômes de P_{r-1} (resp. Q_{r-1}).

Appliquant le Lemme 0.3, il vient :

$$|\hat{E}(\hat{v}\,\hat{p}\,J_K)| \leq \hat{c}\,|\hat{v}|_{r,q,\hat{K}}\,|\hat{p}\,J_K|_{L^{q'}(\hat{K})} \quad \text{, dans le cas simplicial}$$

$$|\hat{E}(\hat{v}\,\hat{p}\,J_K)| \leq \hat{c}\,[\hat{v}]_{r,q,\hat{K}}\,|\hat{p}\,J_K|_{L^{q'}(\hat{K})} \quad \text{, dans le cas quadrilatéral}$$

Ces deux inégalités, et les Lemmes 0.8 et 0.9 entraînent :

$$|\hat{E}(\hat{v}\,\hat{p}\,J_K)| \leq c\,h_K^r\,\frac{\sup J_K}{\inf J_K}\,|v|_{r,q,K}\,|p|_{L^{q'}(K)} \quad)$$

d'où l'on déduit l'inégalité (2.23), grâce au Lemme 0.7.

Du Lemme 2.4, on déduit la

Proposition 2.3 : On suppose que les hypothèses du Lemme 2.4 sont satisfaites. Alors, il existe une constante $C>0$ indépendante de h telle que, pour tout entier r tel que $1 \leq r \leq k$ et tout nombre q vérifiant les inégalités $q \geq 2$, $n-rq<0$ on ait :

$$(2.24)\quad |(f,w_h)_{L^2(\Omega)} - (f,w_h)_h| \leq c\,h^r\,|f|_{r,q,\Omega}\,|w_h|_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $f \in W^{r,q}(\Omega)$, $w_h \in V_h$.

Dans la suite, on suppose, pour simplifier, que la dimension d'espace est inférieure à 3 (lorsque $n \geq 4$, on est amené à raisonner comme dans la Remarque I.3.3). Le Théorème 1.1 et les Propositions 2.1, 2.2 et 2.3 entraînent le résultat suivant.

Théorème 2.1 : Soit $(\mathcal{T}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω. On suppose que les inclusions $P_k \subset \hat{P} \subset P_j$, dans le cas simplicial, et $Q_k \subset \hat{P} \subset Q_j$, dans le cas quadrilatéral sont satisfaites pour des entiers k et j tels que $1 \leq k \leq j$. On suppose d'autre part que la formule de quadrature (1.5) vérifie l'hypothèse (2.1) et l'égalité (2.9), pour $1 \leq r \leq k$, et que la formule de quadrature (1.6) vérifie l'égalité (2.17), pour $1 \leq \ell \leq k+1$. On suppose enfin que le second membre f appartient à $W^{r,q}(\Omega)$ et que la solution u du problème (I.1.1), (I.1.2) appartient à $H^{r+1}(\Omega) \cap H^{\ell+1}(\Omega)$ pour un nombre q tel que $q \geq 2$, $n-2q<0$. Soit $u_h^* \in X_h$ la solution du problème approché (1.17). Alors on a :

$$(2.25)\quad |u-u_h^*|_{L^2(\Omega)} \leq c\left(h^r\left(|f|_{r,q,\Omega} + \|u\|_{r+1,2,\Omega}\right) + h^{\ell-1}\|u\|_{\ell+1,2,\Omega}\right).$$

Si on suppose de plus que la matrice $M+M^*$ est strictement définie positive, et que la formule de quadrature (1.6) vérifie l'hypothèse (2.4), on a :

$$(2.26)\quad |u-u_h^*|_{L^2(\Omega)} + |u-u_h^*|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\left(h^r\left(|g|_{r,q,\Omega}+\|u\|_{r+1,2,\Omega}\right)+h^l\|u\|_{l+1,2,\Omega}\right).$$

Démonstration : L'hypothèse (2.1) étant satisfaite, on a, d'après le Lemme 2.1, les inégalités suivantes, pour tout $v_h \in V_h$:

$$a_h(v_h,v_h) \geq \alpha |v_h|^2_{L^2(\Omega)} \quad ,$$

$$b_h(v_h,v_h) \geq 0 \quad ,$$

où la constante $\alpha>0$ est indépendante de h. En choisissant pour v_h la fonction V_h-interpolée de u : $r_h u$, il vient dans l'inégalité (1.23) du Théorème 1.1 :

$$(2.27)\quad |u-u_h^*|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|u-r_h u\|_{1,2,\Omega} + \sup_{w_h\in X_h} \frac{\left|\int_{\partial\Omega}((B-M)(u-r_h u),w_h)\,ds\right|}{|w_h|_{L^2(\Omega)}} +$$

$$+\sup_{w_h\in X_h}\frac{|a(r_h u,w_h)-a_h(r_h u,w_h)|}{|w_h|_{L^2(\Omega)}}+\sup_{w_h\in X_h}\frac{|b(r_h u,w_h)-b_h(r_h u,w_h)|}{|w_h|_{L^2(\Omega)}}+\sup_{w_h\in X_h}\frac{|(g,w_h)-(g,w_h)_h|}{|w_h|_{L^2(\Omega)}}$$

En utilisant les Lemmes 0.10 et 0.11 comme dans le Théorème I.3.2, on a puisque $r\leq k$:

$$(2.28)\quad \|u-r_h u\|_{1,2,\Omega} \leq C\,h^r\,|u|_{r+1,2,\Omega} \quad ,$$

$$(2.29)\quad \sup_{w_h\in X_h}\frac{\left|\int_{\partial\Omega}((B-M)(u-r_h u),w_h)\,ds\right|}{|w_h|_{L^2(\Omega)}} \leq C\,h^r\,|u|_{r+1,2,\Omega}\,.$$

Le Corollaire 2.1 et le Lemme 0.10 entraînent que :

$$(2.30)\quad \sup_{w_h\in X_h}\frac{|a(r_h u,w_h)-a_h(r_h u,w_h)|}{|w_h|_{L^2(\Omega)}} \leq C h^r\left(\sum_{K\in\mathcal{E}_h}\|r_h u\|^2_{r+1,2,K}\right)^{1/2} \leq C\,h^r\|u\|_{r+1,2,\Omega}\,.$$

D'après le Corollaire 2.2 et les Lemmes 0.6 et 0.11, on a :

$$(2.31)\quad \sup_{w_h\in X_h}\frac{|b(r_h u,w_h)-b_h(r_h u,w_h)|}{|w_h|_{L^2(\Omega)}} \leq C h^{l-\frac12}\left(\sum_{S\subset\partial\Omega}\|r_h u\|^2_{l,2,S}\right)^{1/2} \leq C\,h^{l-\frac12}\|u\|_{l+1,2,\Omega}\,.$$

L'inégalité (2.25) est alors une conséquence des cinq dernières relations et de la Proposition 2.3.

Si la matrice $M+M^*$ est strictement définie positive, et si l'hypothèse (2.4) est satisfaite, on a, pour tout $v_h \in V_h$

$$b_h(v_h, v_h) \geq \beta \, |v_h|^2_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)} \quad ,$$

et on peut appliquer l'inégalité (1.25) du Théorème 1.1.
On doit encore utiliser les majorations précédentes, sauf (2.31) qui est remplacée par :

$$(2.32) \quad \sup_{w_h \in X_h} \frac{|b(r_h u, w_h) - b_h(r_h u, w_h)|}{|w_h|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)}} \leq c h^{\ell} \Big(\sum_{S \subset \partial\Omega} \| r_h u \|^2_{\ell,2,S} \Big)^{1/2} \leq c h^{\ell} \|u\|_{\ell+1,2,\Omega} .$$

On en déduit immédiatement l'inégalité (2.26).

Posons $\mathcal{V} = \{ v \in \mathbb{H}^2(\Omega) ; (B-M)v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$.
Comme dans le Théorème I.3.1, l'inclusion $\mathcal{V} \subset W$ est satisfaite, et $\mathcal{V}$ est dense dans W
Les inégalités (2.28) à (2.31) montrent que les hypothèses de convergence (1.28) à (1.32) du Théorème 1.2 sont satisfaites dès que $k = r = \ell = 1$,
ce qui s'exprime par le

Corollaire 2.1 : On suppose que les hypothèses du Théorème 2.1 sont satisfaites avec $k = r = \ell = 1$ et que la solution u du problème I.1.1, I.1.2 appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Soit u_h^* la solution du problème (1.7). On a :

$$(2.23) \quad \lim_{h \to 0} |u - u_h^*|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0 \quad .$$

Remarque 2.3 : On se place dans le cas des éléments simpliciaux décrits au Chapitre 0, avec $\hat{P} = P_k$, et on suppose que la solution exacte u appartient à $\mathbb{H}^{k+1}(\Omega)$. Si on veut que les erreurs d'approximation et les erreurs dues aux formules de quadrature soient du même ordre, on doit se servir de formules exactes pour les polynômes de P_{2k-1} sur chaque n-simplexe, exactes pour les polynômes de P_{2k} sur chaque $(n-1)$ face incluse dans la frontière $\partial\Omega$, et contenant suffisamment de points pour que l'hypothèse (2.1) soit satisfaite. L'erreur est alors en $O(h^k)$.

Remarque 2.4 : Un critère pratique pour le choix des formules de quadrature est le suivant [47, Chapitre 8] :

(2.34) Les formules de quadrature utilisées sur chaque élément $K \in \mathcal{C}_h$ et sur chaque face $S \subset \partial\Omega \cap \partial K$ sont exactes pour les fonctions de P_K (i.e. pour les fonctions de forme), ce qui peut encore s'écrire :

$$E_K(p) = E_S(p) = 0 \quad , \forall p \in P_K \text{ , pour tout } S \subset \partial\Omega \cap \partial K, K \in \mathcal{C}_h$$

Sur l'élément de référence $\hat{K}$ on a donc :

$$\hat{E}(\hat{p} J_K) = \hat{E}'(\hat{p} J_S) = 0 \quad , \quad \forall \hat{p} \in \hat{P} \ . \tag{2.35}$$

Si l'hypothèse 2.34 est vérifiée, il est possible de montrer qu'un critère pratique de convergence, le Patch Test (pour la définition du Patch Test, voir [14], [46], et pour son utilisation dans le cas de problèmes elliptiques, voir [4], [19], [29]) est satisfait et que la convergence au sens du Corollaire 2.1 est assurée.

Définition 2.1 : On dit que le Patch Test est satisfait si, pour toutes matrices A_i, $0 \le i \le n$, et M constantes, pour tout $f \in (P_0)^p$, tout $v \in (P_0)^p$ et tout $w_h \in V_h$, on a :

$$a(v, w_h) - a_h(v, w_h) = 0 \quad , \tag{2.36}$$

$$b(v, w_h) - b_h(v, w_h) = 0 \quad , \tag{2.37}$$

$$(f, w_h) - (f, w_h)_h = 0 \quad . \tag{2.38}$$

Cette définition apparemment globale est en fait locale ; il suffit en effet de remplacer w_h par les fonctions de base de V_h définies au Chapitre 0, et dont le support est local. On a le résultat suivant :

Théorème 2.2 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω. On suppose que les inclusions $P_k \subset \hat{P} \subset P_j$, dans le cas simplicial, et $Q_k \subset \hat{P} \subset Q_j$, dans le cas quadrilatéral sont satisfaites pour des entiers k et j tels que $1 \le k \le j$. On suppose d'autre part que les formules de quadrature (1.11) et (1.12) sont exactes pour les fonctions de P_K (donc que la relation (2.35) est vérifiée) et que

$$J_K \widehat{\frac{\partial p}{\partial x_i}} \in \hat{P} \quad , \quad 1 \le i \le n \ , \tag{2.39}$$

pour tout $p \in P_K$, tout $K \in \mathcal{C}_h$.

Alors les conclusions des Lemmes 2.2, 2.3 et 2.4 et des Propositions 2.1, 2.2 et 2.3 sont valables pour $r = \ell = 1$, et le Patch Test est vérifié. De plus, si l'hypothèse (2.1) est satisfaite, si u et f appartiennent respectivement à $H^2(\Omega)$ et $W^{1,q}(\Omega)$, avec $q > n$, on a la majoration

$$(2.40)\quad |u - u_h^*|_{L^2(\Omega)} \leq c\left(h\,|f|_{1,q,\Omega} + h^{1/2}\,\|u\|_{2,2,\Omega}\right) .$$

Démonstration : Reprenons la démonstration du Lemme 2.2. On a pour tout $p, w \in \mathcal{P}_K$, $v \in W^{1,\infty}(K)$:

$$|E_K(vpw)| = |\hat{E}(\hat{v}\hat{p}\hat{w}J_K)| \leq c\,\|\hat{v}\hat{p}\|_{1,\infty,\hat{K}}\,|\hat{w}J_K|_{L^2(\hat{K})} ,$$

$$|E_K(v\tfrac{\partial p}{\partial x_i}w)| = |\hat{E}(\hat{v}\widehat{\tfrac{\partial p}{\partial x_i}}\hat{w}J_K)| \leq c\,\|\hat{v}\,\widehat{\tfrac{\partial p}{\partial x_i}}\|_{1,\infty,\hat{K}}\,|\hat{w}J_K|_{L^2(\hat{K})} ,$$

$$|E_K(vp\tfrac{\partial w}{\partial x_i})| = |\hat{E}(\hat{v}\hat{p}\,\widehat{\tfrac{\partial w}{\partial x_i}}J_K)| \leq c\,\|\hat{v}\hat{p}\|_{1,\infty,\hat{K}}\,|\widehat{\tfrac{\partial w}{\partial x_i}}J_K|_{L^2(\hat{K})} ,$$

pour $1 \leq i \leq n$.
Les formes linéaires $\hat{u} \longrightarrow \hat{E}(\hat{u}\hat{w}J_K)$ et $\hat{u} \longrightarrow \hat{E}(\hat{u}\widehat{\tfrac{\partial w}{\partial x_i}}J_K)$ sont continues sur $W^{1,\infty}(\hat{K})$; d'autre part, d'après les relations (2.35) et (2.37), ces applications sont identiquement nulles pour tout $\hat{u} \in \mathcal{P}_0$
D'après le Lemme 0.3, on en déduit les inégalités :

$$|E_K(\hat{v}\hat{p}\hat{w}J_K)| \leq c\,|\hat{v}\hat{p}|_{1,\infty,\hat{K}}\,|\hat{w}J_K|_{L^2(\hat{K})} ,$$

$$|E_K(\hat{v}\widehat{\tfrac{\partial p}{\partial x_i}}\hat{w}J_K)| \leq c\,|\hat{v}\widehat{\tfrac{\partial p}{\partial x_i}}|_{1,\infty,\hat{K}}\,|\hat{w}J_K|_{L^2(\hat{K})} ,$$

$$|E_K(\hat{v}\hat{p}\,\widehat{\tfrac{\partial w}{\partial x_i}}J_K)| \leq c\,|\hat{v}\hat{p}|_{1,\infty,\hat{K}}\,|\widehat{\tfrac{\partial w}{\partial x_i}}J_K|_{L^2(\hat{K})} .$$

On applique ensuite la formule de Leibnitz, et en terminant la démonstration comme dans le Lemme 2.2, on obtient les relations suivantes :

$$(2.41)\quad |E_K(vpw)| \leq c\,h_K\left(\sum_{m=0}^{1} |v|_{m,\infty,K}\,|p|_{1-m,2,K}\right)|w|_{L^2(K)} ,$$

$$(2.42)\quad |E_K(v\tfrac{\partial p}{\partial x_i}w)| \leq c\,h_K\left(\sum_{m=0}^{1} |v|_{m,\infty,K}\,|p|_{2-m,2,K}\right)|w|_{L^2(K)} ,$$

$$(2.43)\quad |E_K(vp\tfrac{\partial w}{\partial x_i})| \leq c\,h_K\left(\sum_{m=0}^{1} |v|_{m,\infty,K}\,|p|_{1-m,2,K}\right)|w|_{L^2(K)} ,$$

pour $1 \le i \le n$, et pour tout $p, w \in \mathbb{P}_K$, $v \in W^{1,\infty}(K)$, $K \in \mathcal{C}_h$.
On montre de la même façon l'inégalité suivante :

$$(2.44)\quad |E_S(p v w)| \le c\, h_K \left(\sum_{m=0}^{1} |v|_{m,\infty,S}\, |p|_{1-m,2,S} \right) |w|_{L^2(S)} ,$$

pour tout $p \in \mathbb{P}_K$, $w \in \mathbb{P}_K$, $v \in W^{1,\infty}(S)$, pour toute face S de dimension $n-1$ de K et tout $K \in \mathcal{C}_h$

En utilisant les inégalités (2.41) à (2.44) et le Lemme 2.4, pour $r=1$ on obtient les inégalités suivantes dans le cas où les matrices A_i, $0 \le i \le n$ et M sont constantes

$$|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)| \le c\, h \left(\sum_{K \in \mathcal{C}_h} |v_h|^2_{1,2,K} + |v_h|^2_{2,2,K} \right)^{1/2} |w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ,$$

$$|b(v_h, w_h) - b_h(v_h, w_h)| \le c\, h^{1/2} \left(\sum_{S \subset \partial\Omega} |v_h|^2_{1,2,S} \right)^{1/2} |w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ,$$

$$|(f, w_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (f, w_h)_h| \le c\, h\, |f|_{1,q,\Omega}\, |w_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

De ces trois dernières inégalités, on déduit que le Patch-Test est vérifié. Enfin si l'hypothèse (2.1) est satisfaite, on peut appliquer le Théorème 2.1, pour $r = l = 1$ et on obtient la majoration (2.40).

II.3 - Un résultat de "super-convergence"

On considère ici le cas où le domaine $\overline{\Omega}$ est un parallélotope à côtés parallèles aux axes. Soit $\mathcal{C}_h$ une triangulation de Ω en parallélotopes à côtés parallèles aux axes, de diamètres inférieurs à h. On suppose toujours, dans ce paragraphe que la famille de triangulations $(\mathcal{C}_h)$, est régulière. Soit alors F_K la seule transformation affine, de jacobien J_K, qui envoie l'hypercube $\hat{K} = [-1,+1]^n$ sur le parallélotope K.
L'espace P_K est défini par :

$$(3.1) \qquad P_K = \left\{ p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \quad ; \quad \forall \hat{p} \in \hat{P} = Q_1 \right\}$$

et on appelle V_h l'espace des fonctions continues dont la restriction à chaque élément K appartient à $(P_K)^p$. (On peut choisir comme degrés de liberté les valeurs aux sommets des éléments).

Nous allons considérer le problème I.2.7 dans le cas particulier où V_h est construit comme ci-dessus, c'est-à-dire

Trouver $u_h \in V_h$ tel que pour tout $v_h \in V_h$

$$(3.2) \qquad (Au_h, v_h)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} ((B-M)u_h, v_h)\, ds = (f, v_h)_{L^2(\Omega)} .$$

D'après les résultats du Chapitre I (Théorème I.3.2), on a :

Théorème 3.1 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω et $u_h \in V_h$ les solutions des problèmes discrets associés. Si la solution u du problème (I.1.1), (I.1.2) appartient à $H^2(\Omega)$, on a :

$$(3.3) \qquad |u - u_h|_{L^2(\Omega)} \leq C h \|u\|_{H^2(\Omega)} ,$$

où C est une constante > 0 indépendante de h.

Le but de ce paragraphe est de montrer que ce résultat peut être amélioré et que l'on a en fait une erreur en $O(h^2)$ dans le cas général, et même en $O(h^{3/2})$ lorsque la matrice $M+M^*$ est définie positive.

Dans la suite, on suppose pour simplifier que $n \leq 4$ (les résultats obtenus s'étendent au cas d'une dimension quelconque n en utilisant le Lemme 0.3). On a les inclusions :

(3.4) $$H^2(\partial\Omega) \subset C^0(\partial\Omega) \quad ,$$

(3.5) $$H^3(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}) \quad .$$

La démonstration donnée ici généralise des résultats de DUPONT [12], obtenus pour un problème à une dimension avec des conditions aux limites périodiques. On commence par démontrer une série de résultats techniques. Pour résoudre le problème posé par les conditions aux limites, on définit comme dans [26] le sous-espace V_h^0 de V_h des fonctions de V_h nulles aux noeuds appartenant à $\partial\Omega$. Soit $\{\psi_j\}_{j=1}^M$ la base de V_h^0 constituée par les fonctions égales à 1 en un noeud a_j intérieur à Ω et égales à zéro aux noeuds a_ℓ, $1 \le \ell \le M$, $\ell \neq j$. Une fonction v_h de V_h peut toujours être décomposée en :

(3.6) $$v_h = v_h^0 + v_h^b \quad , \; v_h^0 \in V_h^0 \; , \; v_h^b \in V_h \; , \text{ et}$$

$$v_h^b = v_h \quad \text{aux noeuds appartenant à } \Omega$$

Lemme 3.1 : ([46]). Soit $v_h^0 = \sum_{j=1}^M \alpha_j \psi_j$ une fonction quelconque de V_h^0. On a :

(3.7) $$\left(\sum_{j=1}^M (\alpha_j)^2 \right)^{1/2} \le C \, h^{-\frac{n}{2}} \, |v_h^0|_{L^2(\Omega)} \quad ,$$

où C est une constante > 0 indépendante de h .

Démonstration : Soit $R = 2^n$ le nombre de noeuds d'un élément K . La restriction de v_h^0 à l'élément K peut s'écrire :

$$v_h^0 = \sum_{j=j_1}^{j_R} \alpha_j \psi_j$$

Posant $\hat{v}_h^0 = v_h^0 \circ F_K$, on a

$$|v_h^0|^2_{L^2(K)} = J_K \, |\hat{v}_h^0|^2_{L^2(\hat{K})} \; .$$

Sur l'élément de référence $\hat{K}$, on peut écrire :

$$\sum_{j=j_1}^{j_R} (\alpha_j)^2 \le \hat{C} \, |\hat{v}_h^0|^2_{L^2(\hat{K})} \quad ,$$

où la constante $\hat{C}$ ne dépend que de $\hat{K}$.

En combinant les deux dernières relations avec le Lemme 0.6, il vient :

$$\sum_{j=j_1}^{j_R} (\alpha_j)^2 \leq c\, h^{-n} |v_h^\circ|^2_{L^2(K)}$$

En sommant l'inégalité précédente pour tous les éléments K de $\mathcal{C}_h$, on obtient la majoration (3.7).

Lemme 3.2 : Soit v_h une fonction quelconque de V_h, écrite comme en (3.6) sous la forme $v_h = v_h^\circ + v_h^b$. On a :

$$(3.8) \qquad |v_h^\circ|_{L^2(\Omega)} \leq c\, |v_h|_{L^2(\Omega)} ,$$

$$(3.9) \qquad |v_h^b|_{0,1,K} \leq c\, h^{\frac{n+1}{2}} |v_h|_{0,2,\partial K \cap \partial\Omega} ,$$

$$(3.10) \qquad |v_h^b|_{0,1,\Omega} \leq c\, h\, |v_h|_{0,2,\partial\Omega} ,$$

où C est une constante >0 indépendante de h.

Démonstration : Pour tout élément K n'ayant aucune face incluse dans $\partial\Omega$ on a :

$$(3.11) \qquad |v_h^\circ|_{L^2(K)} = |v_h|_{L^2(K)} .$$

Pour tout élément K ayant au moins une face incluse dans $\partial\Omega$, on montre en utilisant l'élément de référence $\hat{K}$:

$$(3.12) \qquad |v_h^\circ|^2_{L^2(K)} = J_K |\hat{v}_h^\circ|^2_{L^2(\hat{K})} \leq c\, J_K |\hat{v}_h|^2_{L^2(K)} \leq c\, |v_h|^2_{L^2(K)} ,$$

où C est une constante >0 indépendante de h.

En sommant les relations (3.11) et (3.12) sur tous les éléments K de $\mathcal{C}_h$, on obtient l'inégalité (3.8).

Pour tout élément K ayant une face S incluse dans $\partial\Omega$, on a :

$$(3.13) \qquad |v_h^b|_{0,1,K} = J_K |\hat{v}_h^b|_{0,1,\hat{K}} \leq c\, J_K |\hat{v}_h|_{0,2,\hat{S}} \leq c\, J_K (J_S)^{-1/2} |v_h|_{0,2,S} ,$$

où J_S désigne le jacobien de la restriction de F_K à la face $\hat{S}$, telle que $S = F_K(\hat{S})$. La relation (3.13) et le Lemme 0.7 entraînent l'inégalité (3.9).

En sommant sur tous les éléments K de $\mathcal{C}_h$ ayant au moins une face incluse dans la frontière $\partial\Omega$ (cet ensemble d'éléments constitue le support de la fonction v_h^b), il vient :

$$|v_h^b|_{0,1,\Omega} = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} |v_h^b|_{0,1,K} \leq c\, h^{\frac{n+1}{2}} \sum_{S \subset \partial\Omega} |v_h|_{0,2,S} \leq c\, h\, |v_h|_{0,2,\partial\Omega} .$$

c'est-à-dire l'inégalité (3.10).

Les propriétés de symétrie des fonctions de base Ψ_j par rapport au point a_j permettent de montrer le résultat suivant

Lemme 3.3 : Soit v une fonction de $\mathbb{H}^3(\Omega)$ et $r_h v$ sa fonction V_h-interpolée. On suppose que tous les parallélotopes de la triangulation $\mathcal{C}_h$ sont égaux. Soit Ψ_j une fonction de la base de V_h^0 définie plus haut, et soit $\mathcal{D}_j$ le support de Ψ_j . On a

$$(3.14)\quad \left|\left(A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(v-r_h v),\Psi_j\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right| \le c\,h^{\frac{n}{2}+2}\,\|A_i\|_{1,\infty,\Omega}\left(|v|_{2,2,\mathcal{D}_j}+|v|_{3,2,\mathcal{D}_j}\right),$$

pour $1\le i\le n$

Démonstration : On pose $X_j = \left(A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(v-r_h v),\Psi_j\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$.

On peut écrire $X_j = \overline{X}_j + Y_j$, avec

$$\overline{X}_j = \left(A_i(a_j)\frac{\partial}{\partial x_i}(v-r_h v),\Psi_j\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ,$$

$$Y_j = \left(\left(A_i(x)-A_i(a_j)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(v-r_h v),\Psi_j\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

La matrice A_i étant lipschitzienne en x, on a :

$$Y_j \le c\,h\,\|A_i\|_{1,\infty,\Omega}\,|v-r_h v|_{1,2,\mathcal{D}_j}\,|\Psi_j|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{D}_j)}$$

D'après le Lemme 0.12, on a :

$$|v-r_h v|_{1,2,Q_j} \le c\,h\left(|v|_{2,2,\mathcal{D}_j}+|v|_{3,2,\mathcal{D}_j}\right)$$

Le support $\mathcal{D}_j$ de la fonction Ψ_j est constitué des $R=2^n$ parallélotopes ayant a_j comme sommet commun, d'où :

$$|\Psi_j|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{D}_j)} \le c\,h^{\frac{n}{2}} .$$

Les trois dernières inégalités entraînent :

$$(3.15)\quad |Y_j| \le c\,h^{\frac{n}{2}+2}\,\|A_i\|_{1,\infty,\Omega}\left(|v|_{2,2,\mathcal{D}_j}+|v|_{3,2,\mathcal{D}_j}\right),\ 1\le j\le M .$$

Soit F_j la transformation affine, de jacobien J_j , qui envoie l'élément $\hat{K}$ sur le parallélotope $\mathcal{D}_j$. On a :

$$\overline{X}_j = \frac{J_j}{\Delta x_i}\left(A_i(a_j)\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i}(\hat{v}-r_h\hat{v}),\hat{\Psi}_j\right)_{\mathbb{L}^2(\hat{K})} ,$$

où Δx_i dénote le pas de discrétisation dans la direction x_i :

On a

$$\left|\frac{\Delta x_i\,\overline{X}_j}{J_j}\right| \le c\,\|A_i\|_{0,\infty,\Omega}\,\|\hat{v}\|_{3,2,\hat{K}} ,$$

et d'après la définition de la fonction ψ_j , on a aussi :

$$\frac{\Delta x_i \overline{X}_j}{J_j} = 0 \qquad \text{pour tout } \hat{v} \in (P_2)^p \ .$$

En appliquant le Lemme 0.3, il vient donc :

$$\left| \frac{\Delta x_i \overline{X}_j}{J_j} \right| \leq c \, \| A_i \|_{0,\infty,\Omega} \, |\hat{v}|_{3,2,\hat{K}} \ ,$$

et d'après le Lemme 0.7 :

$$|\overline{X}_j| \leq c \, \frac{J_j^{1/2}}{\Delta x_i} \, h^3 \, \| A_i \|_{0,\infty,\Omega} \, |v|_{3,2,\mathcal{D}_j} \ ,$$

c'est-à-dire en utilisant le Lemme 0.7

$$(3.16) \qquad |\overline{X}_j| \leq c \, h^{\frac{n}{2}+2} \, \| A_i \|_{0,\infty,\Omega} \, |v|_{3,2,\mathcal{D}_j} \ .$$

Les inégalités (3.15) et (3.16) entraînent la majoration (3.14).

Plus généralement, on considère le cas où les parallélotopes de $\mathcal{C}_h$ ne sont plus nécessairement égaux. On pose :

$\Delta_K x_i$ = longueur des arêtes de K dans la direction x_i

$$(3.17) \qquad \Delta_i = \max \left\{ |\Delta_K(x_i) - \Delta_{K'}(x_i)| \, ; \, K, K' \in \mathcal{C}_h, \, K \cap K' = \text{face de dimension } n-1 \right\}$$

pour $1 \leq i \leq n$.

$$(3.18) \qquad \delta = \max \left\{ \Delta_i \, ; \, 1 \leq i \leq n \right\} \ .$$

Lemme 3.4 : Soit v une fonction de $H^3(\Omega)$ et $r_h v$ sa fonction V_h-interpolée. On suppose que les parallélotopes de la triangulation $\mathcal{C}_h$ ne sont pas tous égaux. Soient ψ_j une fonction de la base de V_h^0 définie plus haut, et $\mathcal{D}_j$ le support de ψ_j . On a :

$$(3.19) \qquad \left| \left(A_i(x) \frac{\partial}{\partial x}(v - r_h v), \psi_j \right)_{L^2(\Omega)} \right| \leq c \, h^{\frac{n}{2}} \left\{ \left(h^2 \| A_i \|_{1,\infty,\Omega} + \Delta_i \| A_i \|_{0,\infty,\Omega} \right) |v|_{2,2,\mathcal{D}_j} + \right.$$

$$\left. + h^2 \, \| A_i \|_{0,\infty,\Omega} \, |v|_{3,2,\mathcal{D}_j} \right\} \ ,$$

pour $1 \leq i \leq n$.

Démonstration : On reprend les notations du Lemme précédent. La quantité Y_j se majore toujours par l'inégalité (3.15). Pour majorer $\overline{X_j}$, on procède de la façon suivante. On a :

$$\left|\frac{\Delta x_i \overline{X_j}}{J_j}\right| \leq c \|A_i\|_{0,\infty,\Omega} \|\hat{v}\|_{3,2,\hat{K}} \quad , \text{ pour tout } \hat{v} \in H^3(\hat{K}),$$

$$\left|\frac{\Delta x_i \overline{X_j}}{J_j}\right| \leq c \|A_i\|_{0,\infty,\Omega} \frac{\Delta_i}{\partial x_j} |\hat{v}|_{2,2,\hat{K}} \quad , \text{ pour tout } \hat{v} \in (P_2)^P.$$

En appliquant le Lemme 0.4, on obtient, pour tout $\hat{v} \in H^3(\hat{K})$:

$$\left|\frac{\Delta x_i \overline{X_j}}{J_j}\right| \leq c \|A_i\|_{0,\infty,\Omega} \left(\frac{\Delta_i}{\Delta x_j} |\hat{v}|_{2,2,\hat{K}} + \left(1 + \frac{\Delta_i}{\Delta x_j}\right) |\hat{v}|_{3,2,\hat{K}}\right) .$$

Les Lemmes 0.7 et 0.8 entraînent alors :

$$(3.20) \quad |\overline{X_j}| \leq c\, h^{\frac{n}{2}} \|A_i\|_{0,\infty,\Omega} \left(\Delta_i |v|_{2,2,\mathcal{D}_j} + h^2 |v|_{3,2,\mathcal{D}_j}\right)$$

Les inégalités (3.15) et (3.20) entraînent la majoration (3.19).

Remarque 3.1 : Le Lemme 3.4 généralise le Lemme 3.3, et permet de faire la liaison entre les résultats contenus dans le Lemme 3.3, et les résultats obtenus en majorant brutalement le premier membre de (3.19) en utilisant le Lemme 0.11, car on a dans ce dernier cas :

$$(3.21) \quad \left|\left(A_i(x) \frac{\partial}{\partial x}(v - r_h v), \psi_j\right)_{L^2(\Omega)}\right| \leq c\, h^{\frac{n}{2}+1} \|A_i\|_{1,\infty,\Omega} \left(|v|_{2,2,\mathcal{D}_j} + |v|_{3,2,\mathcal{D}_j}\right)$$

Lemme 3.5 : Soit v une fonction quelconque de $H^3(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$, et $r_h v$ sa V_h-interpolée. On suppose que les parallélotopes de la triangulation $\mathcal{C}_h$ ne sont pas nécessairement égaux. On a alors, pour tout $v_h \in V_h$:

$$(3.22) \quad \left|\left(A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(v - r_h v), v_h\right)_{L^2(\Omega)}\right| \leq c\left((h^2 + \Delta_i)|v|_{2,2,\Omega} + h^3 |v|_{3,2,\Omega}\right)|v_h|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ c\, h^2 |v|_{2,\infty,\Omega} |v_h|_{L^2(\partial\Omega)} \quad ,$$

pour $1 \leq i \leq n$, où C est une constante > 0 indépendante de h.

Démonstration : Soit v_h une fonction quelconque de V_h décomposée comme en (3.6) en

$$(3.23) \quad v_h = v_h^\circ + v_h^b \quad , \quad v_h^\circ \in V_h^\circ \quad ,$$

$$v_h^\circ = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \psi_j \quad .$$

On pose :

$$k_j = \left(A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(v - r_h v),\ \psi_j\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \qquad , \ 1 \le j \le M \ .$$

On a de façon évidente :

$$\left|\left(A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(v - r_h v),\ v_h^0\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right| = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j k_j \le \left(\sum_{j=1}^{M} \alpha_j^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{M} k_j^2\right)^{1/2} .$$

D'après les Lemmes 3.1 et 3.2, on a :

$$\left(\sum_{j=1}^{M} \alpha_j^2\right)^{1/2} \le c\, h^{-\frac{n}{2}} |v_h^0|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le c\, h^{-\frac{n}{2}} |v_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

D'autre part, le Lemme 3.4 entraîne :

$$\left(\sum_{j=1}^{M} k_j^2\right)^{1/2} \le c\, h^{\frac{n}{2}} \Big\{ \left(h^2 \|A_i\|_{1,\infty,\Omega} + \Delta_i \|A_i\|_{0,\infty,\Omega}\right)|v|_{2,2,\Omega} + h^2 \|A_i\|_{0,\infty,\Omega} |v|_{3,2,\Omega} \Big\} .$$

Les matrices A_i, $1 \le i \le n$, étant lipschitziennes en x, on déduit des trois dernières relations que :

$$(3.24)\quad \left|\left(A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(v - r_h v),\ v_h^0\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right| \le c\left((h^2 + \Delta_i)|v|_{2,2,\Omega} + h^2 |v|_{3,2,\Omega}\right)|v_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

On a la majoration :

$$\left|\left(A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(v - r_h v),\ v_h^b\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right| \le \|A_i\|_{0,\infty,\Omega} |v - r_h v|_{1,\infty,\Omega} |v_h^b|_{\mathbb{L}^1(\Omega)} .$$

Les Lemmes 3.2 et 0.11 entraînent alors :

$$(3.25)\quad \left|\left(A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(v - r_h v),\ v_h^b\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right| \le c\, h^2 |v|_{2,\infty,\Omega} |v_h|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)} .$$

En combinant les relations (3.23), (3.24) et (3.25) on obtient l'inégalité (3.22).

Lemme 3.6 : Soit v une fonction quelconque de $\mathbb{H}^3(\Omega) \cap \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$, et $r_h v$ sa fonction V_h-interpolée. On suppose que tous les parallélotopes de la triangulation sont égaux. On a alors, pour tout $v_h \in V_h$:

$$(3.26)\quad \left|\left(A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(v - r_h v),\ v_h\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right| \le c\, h^2 \left(\left(|v|_{2,2,\Omega} + |v|_{3,2,\Omega}\right)|v_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + |v|_{2,\infty,\Omega} |v_h|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)}\right)$$

pour $1 \le i \le n$

Il est maintenant possible de montrer l'estimation d'erreur suivante

Théorème 3.2 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω en parallélotopes à côtés parallèles aux axes. Soit $u_h \in V_h$ la solution du problème (3.2). On suppose que la solution u du problème (I.1.1), (I.1.2) appartient à $H^3(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$. On a alors :

$$(3.27)\quad |u-u_h|_{L^2(\Omega)} \leq C\left((h^2+\delta)|u|_{2,2,\Omega} + h^2|u|_{3,2,\Omega} + h^{3/2}|u|_{2,\infty,\Omega}\right),$$

où C est une constante >0 indépendante de h, et δ est défini comme en (3.18). Si on suppose de plus que la matrice $M+M^*$ est strictement définie positive, on a :

$$(3.28)\quad |u-u_h|_{L^2(\Omega)} + |u-u_h|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\left(h^2(|u|_{2,\infty,\Omega}+|u|_{3,2,\Omega}) + \delta|u|_{2,2,\Omega}\right).$$

Démonstration : Soit l'expression X_h définie par

$$X_h = \left(A(u_h-v_h), u_h-v_h\right)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left((M-B)(u_h-v_h), u_h-v_h\right) ds ,$$

où u_h est la solution du problème (3.2) et v_h est une fonction de V_h .
D'après le Lemme I.1.1, on a :

$$(3.29)\quad X_h \geqslant \frac{c_0}{2}|u_h-v_h|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(M(u_h-v_h), u_h-v_h\right) ds .$$

Puisque u_h est la solution du problème 3.2, on a :

$$(3.30)\quad X_h = \left(A(u-v_h), u_h-v_h\right)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left((M-B)(u-v_h), u_h-v_h\right) ds .$$

Dans l'expression précédente, on choisit $v_h = r_h u$ (la fonction V_h-interpolée de u). Il vient en utilisant les Lemmes 3.5 et 0.10 (hypothèse inverse) :

$$\left|\left(A_i(\cdot)\frac{\partial}{\partial x_i}(u-r_h u), u_h-r_h u\right)_{L^2(\Omega)}\right| \leq C\left((h^2+\delta)|u|_{2,2,\Omega} + h^{3/2}|u|_{2,\infty,\Omega} + h^2|u|_{3,2,\Omega}\right)\cdot$$
$$\cdot |u_h-r_h u|_{L^2(\Omega)} ,$$

pour $1 \leq i \leq n$.
D'après le Lemme 0.12, on a :

$$(3.31)\quad \left|\left(A_0(u-r_h u), u_h-r_h u\right)_{L^2(\Omega)}\right| \leq C\, h^2\left(|u|_{2,2,\Omega}+|u|_{3,2,\Omega}\right)|u_h-r_h u|_{L^2(\Omega)} .$$

Des deux dernières inégalités, on déduit :

$$(3.32)\quad \left|\left(A(u-r_h u), u_h - r_h u\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right| \leq C\left((h^2+\delta)|u|_{2,2,\Omega} + h^{3/2}|u|_{2,\infty,\Omega} + h^2|u|_{3,2,\Omega}\right) \cdot \\ \cdot |u_h - r_h u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

Le Lemme 0.11 permet d'écrire :

$$(3.33)\quad \left|\int_{\partial\Omega} \left((M-B)(u-r_h u), u_h - r_h u\right) ds\right| \leq C h^2 \left(\sum_{S\subset\partial\Omega} |u|^2_{2,2,S}\right)^{1/2} |u_h - r_h u|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)} .$$

Les Lemmes 0.6 et 0.10 entraînent donc :

$$(3.34)\quad \left|\int_{\partial\Omega} \left((M-B)(u-r_h u), u_h - r_h u\right) ds\right| \leq C h^{3/2}\left(|u|_{2,2,\Omega} + |u|_{3,2,\Omega}\right)|u_h - r_h u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

Des relations (3.29) à (3.34), on déduit l'inégalité (3.27).
On considère maintenant le cas où la matrice $M+M^*$ est strictement définie positive. On a :

$$(3.35)\quad X_h \geq C\left(|u_h - r_h u|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + |u_h - r_h u|^2_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)}\right) .$$

Les majorations (3.32) et (3.34) peuvent être remplacées respectivement par :

$$(3.36)\quad \left|\left(A(u-r_h u), u_h - r_h u\right)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right| \leq C\Big\{\left((h^2+\delta)|u|_{2,2,\Omega} + h^2|u|_{3,2,\Omega}\right)|u_h - r_h u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \\ + h^2|u|_{2,\infty,\Omega}|u_h - r_h u|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)}\Big\} ,$$

$$(3.37)\quad \left|\int_{\partial\Omega} \left((M-B)(u-r_h u), u_h - r_h u\right) ds\right| \leq C h^2\left(|u|_{2,2,\Omega} + |u|_{3,2,\Omega}\right)|u_h - r_h u|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)} .$$

L'inégalité (3.28) est une conséquence des relations (3.30), (3.35), (3.36) et (3.37).

Corollaire 3.1 : Lorsque tous les parallélotopes de la triangulation sont égaux, on a la majoration :

$$(3.38)\quad |u - u_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\left(h^2\left(|u|_{2,2,\Omega} + |u|_{3,2,\Omega}\right) + h^{3/2}|u|_{2,\infty,\Omega}\right) .$$

Si la matrice $M+M^*$ est strictement définie positive, alors :

$$(3.39)\quad |u-u_h|_{L^2(\Omega)} + |u-u_h|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C h^2 \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + |u|_{3,2,\Omega} \right) .$$

Remarque 3.2 : Les conclusions du Corollaire 3.2 restent valables si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(3.40)\quad \delta \leq C h^2 \quad ,$$

c'est-à-dire si les parallélotopes sont "presque" égaux.

Nous allons examiner rapidement ce que deviennent les résultats précédents lorsqu'on utilise les formules de quadrature (1.5) et (1.6) pour calculer les intégrales. Tout d'abord, si les coefficients des matrices A_i, $0 \leq i \leq n$ et M sont constants et si le second membre f est un polynôme de $(Q_1)^2$, les résultats du Théorème 3.2 sont valables dès que les formules de quadrature sont exactes pour les polynômes de Q_2 . En généralisant les résultats des paragraphes 1 et 2, on obtient :

Théorème 3.3 : On suppose que les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites et que les formules de quadrature (1.5) et (1.6) vérifient

$$(3.41)\quad \hat{E}(\hat{g}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \hat{g} \in Q_3 \quad ,$$

$$(3.42)\quad \hat{E}'(\hat{g}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \hat{g} \in P_3 \quad .$$

Alors si la solution u appartient à $H^3(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ et si f appartient à $W^{2,q}(\Omega)$, pour $q > \frac{n}{2}$, $q \geq 2$, on a :

$$(3.43)\quad |u-u_h|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(h^2 \left(\|u\|_{3,2,\Omega} + \|f\|_{2,q,\Omega} \right) + \delta |u|_{2,2,\Omega} + h^{3/2} |u|_{2,\infty,\Omega} \right) .$$

De plus, si la matrice $M+M^*$ est définie positive, alors :

$$(3.44)\quad |u-u_h|_{L^2(\Omega)} + |u-u_h|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \left(h^2 \left(\|u\|_{3,2,\Omega} + \|u\|_{2,\infty,\Omega} + \|f\|_{2,q,\Omega} \right) + \delta |u|_{2,2,\Omega} \right) .$$

Remarque 3.3 : Les conclusions du Théorème 3.3 peuvent être encore valables dans certains cas, sans que les hypothèses (3.41) et (3.42) soient satisfaites, comme on peut le constater sur l'exemple suivant :

Exemple 3.1 : On reprend l'exemple (I.1.2), (I.3.4) :

$$(3.45) \qquad -\frac{d^2u}{dx^2} + u = f \qquad \text{pour} \qquad x \in]0,1[$$

$$(3.46) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

où encore en posant $\frac{du}{dx} = v$

$$(3.47) \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit V_h l'espace des fonctions (φ_h, ψ_h) dont les composantes sont linéaires sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, avec $x_i = ih$, $0 \le i \le I$, et telles que $\varphi_h(0) = \varphi_h(1) = 0$. Soit la formule de quadrature suivante

$$(3.48) \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) \quad , \quad 0 \le i \le I-1 \quad .$$

Cette formule de quadrature induit le produit scalaire discret

$$(3.49) \qquad (u, \varphi)_h = \sum_{i=0}^{I-1} \frac{h}{2}\left((u\varphi)(x_i) + (u\varphi)(x_{i+1})\right) \quad .$$

On pose le problème suivant : Trouver $(u_h, v_h) \in V_h$ tel que :

$$(3.50) \qquad \left(-\frac{1}{2}\frac{dv_h}{dx} + u_h - f, \varphi_h\right)_h + \left(-\frac{1}{2}\frac{du_h}{dx} + v_h, \psi_h\right)_h +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}v_h, \frac{d\varphi_h}{dx}\right)_h + \left(\frac{1}{2}u_h, \frac{d\psi_h}{dx}\right)_h = 0 \quad ,$$

pour tout $(\varphi_h, \psi_h) \in V_h$, ou de façon équivalente :

$$(3.51) \qquad \int_0^1 \left(-\frac{du_h}{dx}\psi_h - \frac{dv_h}{dx}\varphi_h\right)dx + (u_h - f, \varphi_h)_h + (v_h, \psi_h)_h = 0 \quad .$$

Si on pose $(u_i, v_i, f_i) = (u_h(x_i), v_h(x_i), f(x_i))$, $0 \le i \le I$,
le problème (3.50) s'écrit sous la forme du système linéaire :

$$-\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + u_i = f_i \quad , \quad 1 \le i \le I-1$$

$$-\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + v_i = 0 \quad , \quad 1 \le i \le I-1$$

$$-\frac{u_1 - u(0)}{h} + v_0 = 0 \quad ,$$

$$-\frac{u(1) - u_{I-1}}{h} + v_I = 0 \quad .$$

L'erreur de troncature aux points x_i , $1 \le i \le I-1$, est en $O(h^2)$ et on a le résultat suivant

Proposition 3.1 : On suppose que la solution u du problème (3.4.5), (3.4.6) appartient à $H^4(0,1)$ et que le second membre f appartient à $H^2(\Omega)$ Soit (u_h, v_h) la solution du problème (3.50). On a :

$$(3.52)\quad |u-u_h|_{L^2(0,1)} + \left|\frac{du}{dx} - v_h\right|_{L^2(0,1)} \le C\left(h^{3/2}\|u\|_{H^4(0,1)} + h^2 |f|_{H^2(0,1)}\right).$$

Démonstration : Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}$. On considère

$$X_h = \left(\mathcal{A}(w_h - \phi_h), w_h - \phi_h\right)_{L^2(0,1)} + \left(w_h - \phi_h, w_h - \phi_h\right)_h ,$$

avec $w_h = (u_h, v_h)$, $\phi_h = (\varphi_h, \psi_h) \in V_h$.

On a :

$$(3.53)\quad X_h \ge |w_h - \phi_h|^2_{L^2(0,1)}$$

D'autre part, si on pose : $A = \mathcal{A} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $w = (u, v)$,

on a :

$$(3.54)\quad X_h = \left(A(w - \phi_h), w_h - \phi_h\right)_{L^2(0,1)} + \left(f, u_h - \varphi_h\right)_h - \left(f, u_h - \varphi_h\right)_{L^2(0,1)} + \left(\phi_h, w_h - \phi_h\right)_{L^2(0,1)} - \left(\phi_h, w_h - \phi_h\right)_h .$$

Le premier terme de l'expression X_h peut être majoré comme dans le Théorème 3.2, et en remplaçant w_h par $r_h w$ (interpolé de w) on a :

$$(3.55)\quad \left|\left(A(w - \phi_h), w_h - \phi_h\right)_{L^2(0,1)}\right| \le C h^{3/2}\|u\|_{H^4(0,1)} \, |w_h - \phi_h|_{L^2(0,1)}$$

D'autre part, on a :

$$\left(f, \varphi_h\right)_h - \left(f, \varphi_h\right)_{L^2(0,1)} = \sum_{j=1}^{I-1} \alpha_j \left(h f(x_j) - \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f \varphi_j \, dx\right) \quad , \text{ avec}$$

$\varphi_h = \sum_{j=1}^{I-1} \alpha_j \varphi_j$, où les φ_j , $1 \le j \le I-1$, sont les fonctions linéaires dans chaque intervelle et telles que $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$, $0 \le i \le I$.

Il est aisé de voir que :

$$\left(\sum_{j=1}^{I-1} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2} \leq c\, h^{-\frac{1}{2}} \, |\varphi_h|_{L^2(0,1)}$$

$$\left| h f(x_j) - \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f \varphi_j \, dx \right| \leq c\, h^{\frac{5}{2}} \, |f|_{H^2(0,1)} \, , \quad 1 \leq j \leq I-1$$

On en déduit alors :

$$(3.56) \quad \left| (f, u_h - \varphi_h)_h - (f, u_h - \varphi_h)_{L^2(0,1)} \right| \leq c\, h^2 \, |f|_{H^2(0,1)} \, |u_h - \varphi_h|_{L^2(0,1)} .$$

De même, il est facile de montrer en remplaçant $r_h w$ par $(r_h w - w) + w$ que

$$(3.57) \quad \left| (r_h w, w_h - \phi_h)_{L^2(0,1)} - (r_h w, w_h - \phi_h)_h \right| \leq c\, h^{\frac{3}{2}} \, \| u \|_{H^4(0,1)} .$$

Les inégalités (3.53) à (3.57) entraînent la majoration (3.52).

CHAPITRE III

APPROXIMATION DE L'EQUATION DE TRANSPORT EN GEOMETRIE BIDIMENSIONNELLE PLANE PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS CONTINUES ET DISCONTINUES

Ce Chapitre est consacré à la résolution numérique de l'équation de transport en géométrie plane bidimensionnelle $(x-y)$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = f \qquad \text{pour} \quad (x,y) \times (\mu,\nu) \in \Omega \times Q$$

$$u(x,y,\mu,\nu) = 0 \quad \text{sur} \quad (\partial\Omega \times Q)^- = \{(x,y,\mu,\nu) \in \partial\Omega \times Q \; ; \; \mu n_x + \nu n_y < 0\}.$$

Comme dans [15], [26], [27], [37], on s'intéresse à la discrétisation suivant les variables d'espace x et y , les variables angulaires étant traitées comme des paramètres (pour un traitement global, voir [34]).
Le plan du Chapitre est le suivant :

1) On rappelle un théorème d'existence de la solution, le problème décrit ci-dessus étant considéré comme un "système" de Friedrichs. Comme au Chapitre I, on cherche une solution u_h dans un espace de dimension finie V_h , par une méthode de Galerkin. Cette méthode nécessite l'inversion d'un système linéaire de taille considérable et ne permet pas de résoudre le problème en suivant la direction caractéristique. On définit alors une procédure permettant de suivre "au mieux" cette direction caractéristique au cours de la résolution.

2) On définit les méthodes continues et on considère tout particulièrement le cas où les éléments finis sont des quadrilatères convexes de diamètres $\leq h$, les fonctions de forme étant construites à partir de polynômes de Q_k
On montre que si certaines conditions de stabilité sont satisfaites, l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée, mesurée par une norme L^2 discrète est en $O(h^{k+1})$.

3) On définit les méthodes discontinues [42], et on considère particulièrement le cas où les éléments finis sont des quadrilatères convexes; La méthode est inconditionnellement stable. En utilisant un "Lemme de BRAMBLE et HILBERT approché", on montre que si les quadrilatères ont tous deux côtés éclairés et sont peu déformés, alors l'erreur en norme L^2 est de l'ordre de h^2 .

4) On décrit quelques essais numériques.

III.1 - Position du problème

On veut résoudre l'équation de transport en géométrie plane $(x\text{-}y)$, qui s'écrit sous la forme du problème du 1er ordre suivant :

$$(1.1)\quad Au \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = f \qquad \text{pour } (x,y)\times(\mu,\nu) \in \Omega \times Q \ ,$$

$$(1.2)\quad u(x,y,\mu,\nu) = 0 \qquad \text{pour } (x,y,\mu,\nu) \in (\partial\Omega \times Q)^- \ ,$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$, Q est le disque unité $\mu^2+\nu^2 \leq 1$ et où on a posé :

$$(1.3)\quad (\partial\Omega \times Q)^- = \left\{ (x,y)\times(\mu,\nu) \in \partial\Omega \times Q \ ; \ B = \mu n_x + \nu n_y < 0 \right\} \ ,$$

n_x et n_y désignant les composantes de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

La fonction $u(x,y,\mu,\nu)$ représente un flux de neutrons au point de coordonnées (x,y) , dans la direction angulaire repérée par le vecteur (μ,ν) . La quantité σ représente une section efficace et le terme $f(x,y,\mu,\nu)$ prend en compte le scattering, la fission et les sources.

Les conditions aux limites (1.2) expriment que le flux de neutrons entrant dans le système est nul.

En pratique, pour effectuer les calculs, on découple souvent les variables d'espace (x,y) et les variables angulaires (μ,ν) , en utilisant la méthode des ordonnées discrètes [1, Chapitre 5], ce qui consiste à choisir un ensemble de directions angulaires (μ_m,ν_m) , $1 \leq m \leq M$ et on résout séparément les équations aux dérivées partielles

$$(1.5)\quad \mu_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + \nu_m \frac{\partial u_m}{\partial y} + \sigma_m u_m = f_m \qquad \text{pour } (x,y)\in\Omega,$$

$$(1.6)\quad u_m(x,y) = 0 \qquad \text{pour } (x,y) \in \partial_-^m\Omega \ ,$$

où

$$(1.7)\quad \partial_-^m\Omega = \left\{ (x,y)\in\partial\Omega \ ; \ \mu_m n_x + \nu_m n_y < 0 \right\} \ , \ 1 \leq m \leq M$$

et

$$(1.8)\quad u_m(x,y) = u(x,y,\mu_m,\nu_m)$$

Dans la suite de ce Chapitre, on s'intéresse à l'approximation numérique de $u_m(x,y)$, pour chaque valeur de m fixée, en utilisant des méthodes d'éléments finis. Pour simplifier l'écriture, on supprime l'indice m et le problème continu s'écrit :

$$(1.9) \quad Au \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = f \qquad \text{pour } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 ,$$

$$(1.10) \quad u(x,y) = 0 \quad \text{pour } (x,y) \in \partial_- \Omega$$

où

$$(1.11) \quad \partial_- \Omega = \{ (x,y) \in \partial\Omega \ ; \ B \equiv \mu n_x + \nu n_y < 0 \} .$$

Les conditions aux limites (1.10) peuvent encore s'écrire :

$$(1.12) \quad (B - M) u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega ,$$

où, conformément au Lemme I.1.4, le scalaire M est défini par :

$$M = -B \qquad \text{sur } \partial_- \Omega ,$$

$$M = B \qquad \text{sur } \partial_+ \Omega , \qquad \text{avec}$$

$$(1.13) \quad \partial_+ \Omega = \{ (x,y) \in \partial\Omega \ ; \ B \equiv \mu n_x + \nu n_y > 0 \} .$$

Le problème (1.9), (1.11) correspond donc à un système symétrique positif de FRIEDRICHS, qui se réduit à une seule équation et on peut citer le résultat d'existence d'une solution suivant [13, pp. 382-383].

Théorème 1.1 : On suppose que la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^2. Alors pour tout f appartenant à $H^1(\Omega)$, le problème (1.9), (1.10) a une solution forte unique u (au sens de la définition (I.1.2) appartenant à $H^1(\Omega)$).

Remarque 1.1 : Le Théorème 1.1 peut s'étendre au cas où la frontière est de classe C^2 par morceaux [38, p. 241].

Remarque 1.2 : Le Théorème 1.1 est en fait un résultat de régularité pour la solution du problème (1.9), (1.10). Dans le cas général, la solution n'appartient pas à $H^2(\Omega)$, même si le second membre f est très régulier, comme le montre l'exemple simple suivant :

Soit Ω le carré $]0,1[\times]0,1[$ (figure 1.1). On choisit $f = \sigma = 1$ et on suppose que μ et ν sont strictement positifs.

La solution $u(x,y)$ est donnée par :

$$(1.14)\quad u(x,y) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{y}{\nu}\right) & \text{si } \nu x > \mu y \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) & \text{si } \nu x < \mu y \end{cases}$$

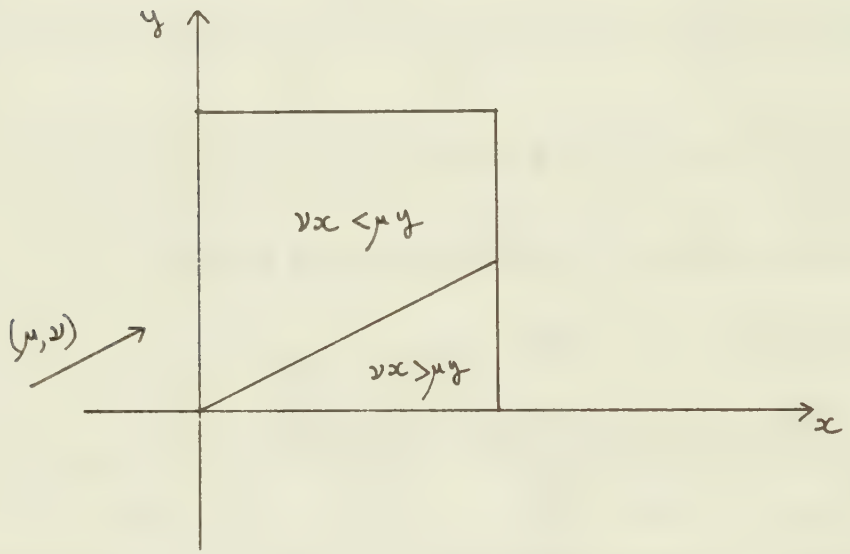


Figure 1.1

Les formules de GREEN du Chapitre I (Lemmes 1.1 et 1.2) s'écrivent ici :

Lemme 1.1 : Pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$(1.15)\quad \int_\Omega \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u\right) v \, dx\, dy = \int_\Omega \left(-\mu \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma v\right) u \, dx\, dy + \int_{\partial\Omega} (\mu n_x + \nu n_y) u v \, ds,$$

$$(1.16)\quad (Au,u)_{L^2(\Omega)} \equiv \int_\Omega \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u\right) u \, dx\, dy = \int_\Omega \sigma u^2 \, dx\, dy + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mu n_x + \nu n_y) u^2 \, ds .$$

Remarque 1.3 : En choisissant $v = 1$ dans l'égalité (1.15), on peut écrire :

$$(1.17)\quad \int_\Omega f \, dx\, dy = \int_\Omega \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u\right) dx\, dy = \int_\Omega \sigma u \, dx\, dy + \int_{\partial\Omega} (\mu n_x + \nu n_y) u \, ds ,$$

ou bien de façon équivalente

$$(1.18)\quad \int_{\partial_+\Omega} (\mu n_x + \nu n_y) u \, ds + \int_\Omega \sigma u \, dx\, dy = -\int_{\partial_-\Omega} (\mu n_x + \nu n_y) u \, ds + \int_\Omega f \, dx\, dy .$$

Cette dernière relation exprime la conservation des neutrons.

Remarque 1.4 : La solution u au point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) ne dépend que des valeurs de σ, f et u le long de la caractéristique passant par le point M_0 (c'est-à-dire la droite D d'équation $\mu(y-y_0)+\nu(x-x_0)=0$) et en amont de M_0, c'est-à-dire pour $(x,y) \in D$ tels que l'on ait :

$$\mu(x-x_0) < 0 \quad .$$

Les deux remarques précédentes vont jouer un rôle fondamental lors de l'approximation numérique du problème (1.9), (1.10). En effet, on essaiera de définir des schémas numériques tels que la conservation des neutrons soit satisfaite de façon discrète et tels que la solution approchée u_h puisse être calculée en suivant les directions caractéristiques (i.e. en suivant les neutrons).

Pour approcher le problème (1.9), (1.10), on considère une triangulation $\mathcal{C}_h$ de Ω en éléments finis K triangulaires ou quadrilatéraux, de diamètre $\leq h$ Lorsque l'élément K est un triangle, on suppose qu'il est l'image par une transformation affine inversible F_K d'un triangle de référence $\hat{K}$ (en général, on choisit pour $\hat{K}$ le triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit sont de longueur égale à un). Lorsque l'élément K est un quadrilatère convexe non dégénéré, il est l'image par une transformation F_K appartenant à $(Q_1)^2$ du carré de référence $\hat{K} = [-1,+1] \times [-1,+1]$.

A chaque élément K de $\mathcal{C}_h$, on associe un espace de dimension finie tel que :

(1.19) $$P_K = \{ p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \quad , \quad \hat{p} \in P_k \}$$ dans le cas triangulaire,

(1.20) $$P_K = \{ p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \quad , \quad \hat{p} \in Q_k \}$$ dans le cas quadrilatéral.

On a l'inclusion :

(1.21) $$P_K \subset H^1(K) \quad , \quad K \in \mathcal{C}_h \quad .$$

Posant $W_h = \prod_{K \in \mathcal{C}_h} P_K$, on a l'inclusion

(1.22) $$W_h \subset L^2(\Omega) \quad .$$

Si les degrés de liberté des éléments $\hat{K}$ sont choisis comme dans l'exemple 0.1 dans le cas triangulaire et comme dans l'exemple 0.2 dans le cas quadrilatéral, et si on note V_h le sous-espace de W_h des fonctions continues aux noeuds de la triangulation, on a alors :

(1.23) $$V_h \subset H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \quad .$$

On note X_h le sous-espace de V_h défini par

$$X_h = \{ v_h \in V_h \ ; \quad v_h = 0 \quad \text{aux noeuds appartenant à } \partial\Omega \} \tag{1.24}$$

On rappelle les notations suivantes :

$$\begin{cases} h_K = \text{diamètre de } K \\ \rho_K = \sup \{ \text{diamètre des cercles contenus dans } K \} \\ \theta_{i,K}, 1 \le i \le 4 = \text{angles de } K \text{, si } K \text{ est un quadrilatère,} \\ Z_K = \text{distances entre les milieux des diagonales de } K \text{, si est un quadrilatère.} \end{cases} \tag{1.25}$$

Dans toute la suite du Chapitre, on suppose que les hypothèses (0.68), dans le cas triangulaire et (0.69) dans le cas quadrilatéral sont satisfaites, c'est-à-dire qu'il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$h_K \le C \rho_K \qquad \text{pour tout } K \in \mathcal{C}_h \tag{1.26}$$

et une constante γ indépendante de h, avec $0 < \gamma < 1$, telle que :

$$\max_{1 \le i \le 4} |\cos(\theta_{i,K})| \le \gamma \quad \text{pour tout quadrilatère } K \in \mathcal{C}_h \ . \tag{1.27}$$

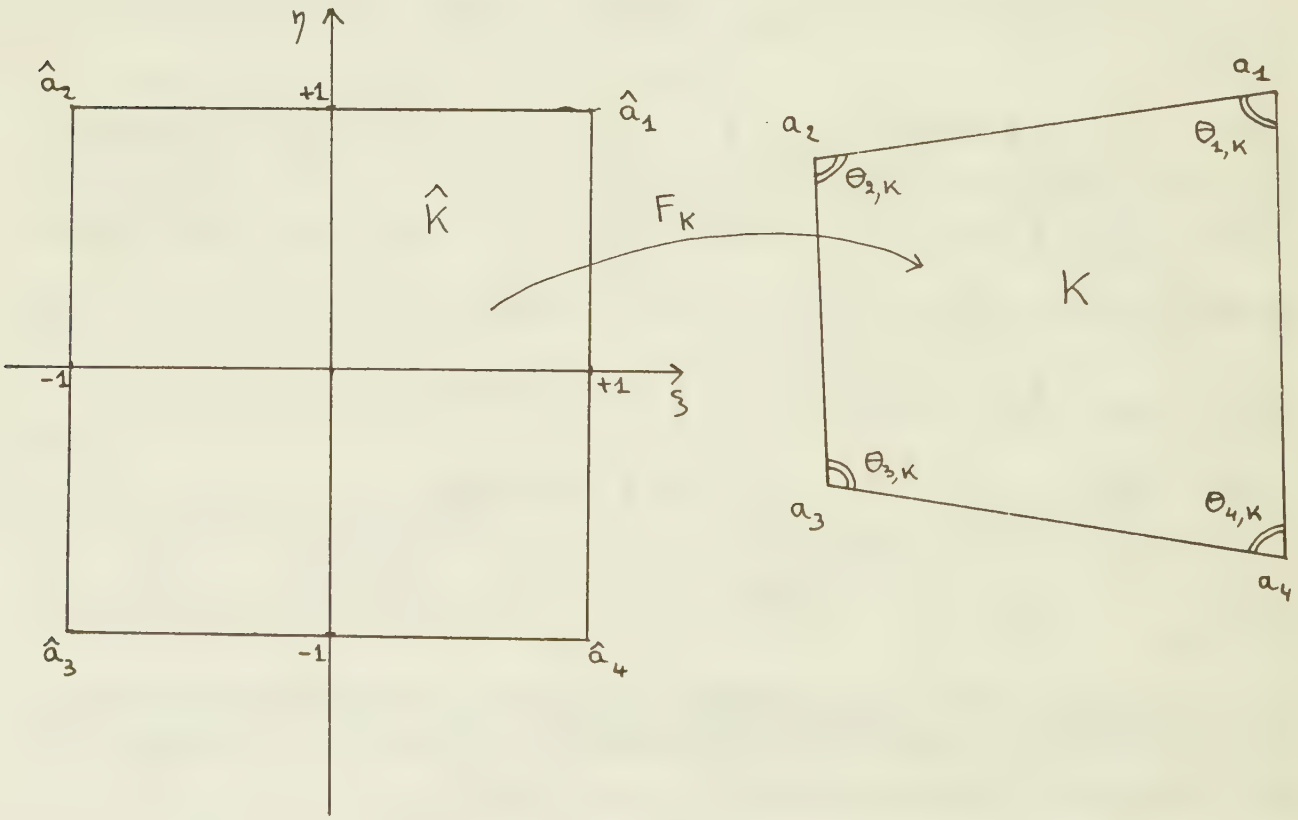


Figure 1.2 - Elément quadrilatéral

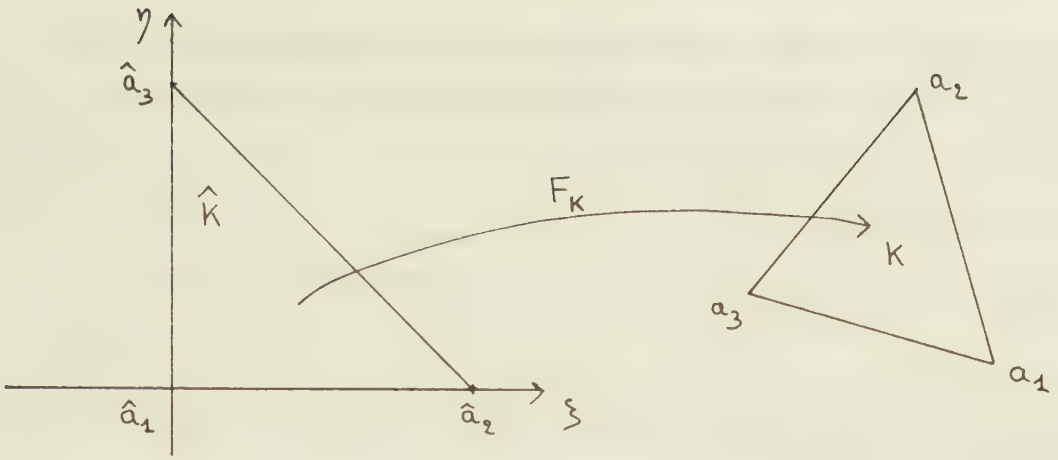


Figure 1.3 - Elément triangulaire

Comme au Chapitre I, il est possible d'approcher le problème (1.9), (1.10) en utilisant une méthode de type GALERKIN. Pour cela, soit V_h (on peut choisir par exemple $V_h = X_h$) un sous-espace de dimension finie de $H^1(\Omega)$ <u>on cherche</u> $u_h \in V_h$ <u>tel que</u> :

$$(1.28)\quad \int_\Omega \left(\mu \frac{\partial u_h}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_h}{\partial y} + \sigma u_h - f\right) v_h \, dx\,dy - \int_{\partial\Omega} (\mu n_x + \nu n_y) u_h v_h \, ds = 0$$

<u>pour tout</u> $v_h \in V_h$.

On a le résultat suivant dont on rappelle ici la démonstration.

<u>Théorème 1.2</u> : <u>On suppose que</u> $\sigma(x,y) \geq \alpha > 0$ <u>et que</u> f <u>appartient à</u> $L^2(\Omega)$. <u>Le problème</u> (1.28 <u>a une solution unique</u> $u_h \in V_h$ <u>et on a</u> :

$$(1.29)\quad |u_h|_{L^2(\Omega)} \leq C |f|_{L^2(\Omega)} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On pose

$$Y(v_h) = \int_\Omega \left(\mu \frac{\partial v_h}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_h}{\partial y} + \sigma v_h\right) v_h \, dx\,dy - \int_{\partial\Omega} (\mu n_x + \nu n_y) v_h^2 \, ds \quad .$$

D'après le Lemme 1.1, on a :

$$Y(v_h) = \int_\Omega \sigma v_h^2 \, dx\,dy + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\mu n_x + \nu n_y| \, v_h^2 \, ds \quad ,$$

ce qui entraîne l'existence d'une solution approchée unique u_h pour le problème (1.28). D'autre part, on a :

$$Y(u_h) = \int_\Omega f u_h \, dx\,dy \leq |f|_{L^2(\Omega)} |u_h|_{L^2(\Omega)} \quad ,$$

d'où l'on déduit la majoration (1.29).

Remarque 1.5 : On peut toujours se ramener au cas où on a : $\sigma(x,y) \geq \alpha > 0$, car en utilisant le changement de fonction

$$u = \exp\left(\lambda\left(\frac{x}{\mu} + \frac{y}{\nu}\right)w\right)$$

l'équation (1.1) devient :

$$\mu \frac{\partial w}{\partial x} + \nu \frac{\partial w}{\partial y} + (\sigma + 2\lambda) w = f \exp\left(-\lambda\left(\frac{x}{\mu} + \frac{y}{\nu}\right)\right) .$$

Lorsque les espaces P_K , $K \in \mathcal{C}_h$ sont choisis comme en (1.19) ou (1.20), et l'espace V_h est construit comme ci-dessus, les résultats du Chapitre I paragraphe 3 permettent d'énoncer le

Théorème 1.3 : On suppose que les hypothèses (1.26) et (1.27), ainsi que les inclusions

(1.30) $\hat{P} \subset P_k$ lorsque $\hat{K}$ est un triangle

(1.31) $\hat{P} \subset Q_k$ lorsque $\hat{K}$ est un carré

sont satisfaites pour un entier $k \geq 1$. Soit $u_h \in V_h$ la solution du problème (1.28). Alors si la solution u du problème (1.9), (1.10) appartient à $H^{k+1}(\Omega)$, on a :

$$(1.32) \quad |u - u_h|_{L^2(\Omega)} \leq C h^k |u|_{k+1,2,\Omega} .$$

De même, les résultats obtenus au Chapitre II paragraphe 3 s'énoncent, dans le cas de l'équation de transport.

Théorème 1.4 : On suppose que le domaine Ω est un rectangle triangulé en rectangles égaux, que l'hypothèse (1.26) est satisfaite, et que $\hat{P} = Q_1$. Soit $u_h \in V_h$ la solution du problème (1.28). Alors si la solution u du problème (1.9), (1.10) appartient à $H^3(\Omega)$, on a :

$$(1.33) \quad |u - u_h|_{L^2(\Omega)} + |u - u_h|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C h^2 \|u\|_{3,2,\Omega} .$$

Remarque 1.6 : Lorsque les inclusions (1.30) et (1.31) sont satisfaites, on peut remplacer v_h par 1 dans l'égalité (1.28). Appliquant le Lemme 1.1, on obtient la relation de conservation des neutrons.

$$(1.34) \quad \int_{\partial_+\Omega} (\mu n_x + \nu n_y) u_h \, ds + \int_\Omega \sigma u_h \, dx\,dy = -\int_{\partial_-\Omega} (\mu n_x + \nu n_y) u_h \, ds + \int_\Omega f \, dx\,dy .$$

Remarque 1.7 : Les Théorèmes 1.3 et 1.4 et la Remarque 1.2 montrent que dans certains cas pratiques, il peut être inutile d'utiliser des polynômes de degré ≥ 2 . On trouve d'ailleurs une remarque semblable dans [43, page 10].

La résolution numérique du problème (1.28) nécessite l'inversion d'un système linéaire dont le nombre d'inconnues est égal au nombre de noeuds de la triangulation. La matrice du système n'est pas en général bloc triangulaire et on ne peut pas résoudre en suivant la direction caractéristique. Au contraire dans les deux paragraphes suivants, nous allons approcher le problème (1.9), (1.10) en s'imposant le principe suivant :
Soit $\mathcal{C}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ en éléments K . On pose :

$$(1.35)\quad \partial_- K \ (\text{resp } \partial_+ K) = \{(x,y) \in \partial K \ ; \ \mu n_{x,K} + \nu n_{y,K} < 0 \ (\text{resp.} > 0)\}$$

où $n_{x,K}$ et $n_{y,K}$ sont les composantes de la normale extérieure à ∂K .

$$(1.36)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{On calcule la solution approchée } u_h \text{ sur un élément } K \text{ que si} \\ \text{on connaît déjà la valeur de } u_h \text{ sur la } \underline{\text{portion éclairée}} \ \partial_- K \text{ de} \\ \text{la frontière } \partial K \end{array} \right.$$

Le principe (1.36) peut permettre de résoudre le problème (1.9), (1.10) en suivant approximativement la direction caractéristique. On rappelle maintenant la démonstration d'un Lemme [31, pp. 15-19] qui montre qu'il est possible de calculer la solution approchée sur tout le domaine Ω , en s'imposant le principe (1.36).

Lemme 1.2 : On peut classer les éléments K de $\mathcal{C}_h$ dans un ordre $K_1, K_2, \ldots, K_N$ tel que pour tout j , $1 \le j \le N$, chaque côté de K_j contenu dans $\partial_- K_j$ est soit un sous-ensemble de $\partial_- \Omega$ soit un sous-ensemble de $\partial_+ K_i$ pour un indice $i < j$.

Démonstration : On introduit tout d'abord quelques notations. On dira que l'élément K est frontalier s'il a au moins un côté inclus dans $\partial\Omega$, et que l'élément K est semi frontalier s'il n'est pas frontalier et si au moins un de ses sommets appartient à $\partial\Omega$. On numérote dans le sens des aiguilles d'une montre les éléments frontaliers $K^1, K^2, \ldots, K^r$ correspondants à $\partial_- \Omega$

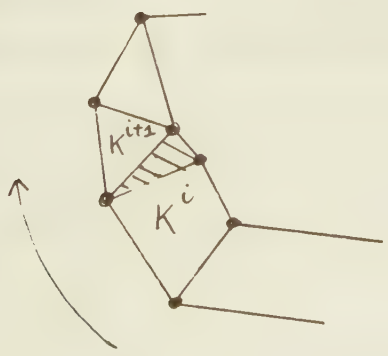


Figure 1.4

Lorsque deux éléments frontaliers successifs K^i et K^{i+1} n'ont pas de côté commun, il existe au moins un élément semi frontalier entre K^i et K^{i+1}. On dit qu'un côté de K^i (resp. K^{i+1}) est attaché à K^{i+1} (resp. K^i) si ce côté est soit commun à K^i et K^{i+1}, ou bien s'il est un sous-ensemble de l'union des côtés des éléments semi frontaliers situés entre K^i et K^{i+1} (figure 1.4).

Nous allons montrer maintenant qu'il existe au moins un élément frontalier K tel que l'on ait $\partial_- K \subset \partial_- \Omega$. Pour cela, supposons que $\partial_- K^i \not\subset \partial_- \Omega$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ et montrons que l'on aboutit à une contradiction.

On considère le premier élément frontalier K^1 et on utilise les notations de la figure 1.5

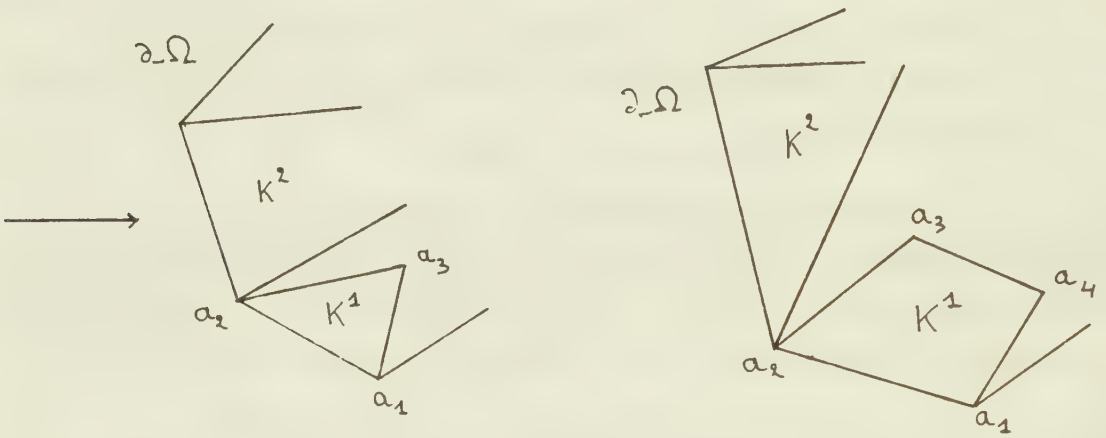


Figure 1.5

Dans le cas triangulaire (resp. quadrilatéral), le côté $[a_1, a_3]$ (resp. $[a_1, a_4]$) de K^1 est un sous-ensemble de $\partial_+ K^1$. Sinon K^1 ne serait pas le premier élément frontalier de $\partial_- \Omega$. Ensuite, le côté $[a_2 a_3]$ de K^1 qui est attaché à K^2 est inclus dans $\partial_- K^1$. Sinon, on aurait $\partial_- K^1 = [a_1, a_2] \subset \partial_- \Omega$, ce qui a été exclu plus haut. On en déduit que le côté de K^2 qui est attaché à K^1 appartient à $\partial_+ K^2$. Plus généralement, on a la propriété suivante, pour tout $i = 1, \ldots, r-1$: le côté de K^i qui est attaché à K^{i+1} est un sous-ensemble de $\partial_- K^i$ et le côté de K^{i+1} qui est attaché à K^i est un sous-ensemble de $\partial_+ K^{i+1}$. On considère maintenant le dernier élément frontalier K^r et on utilise les notations de la figure 1.6.

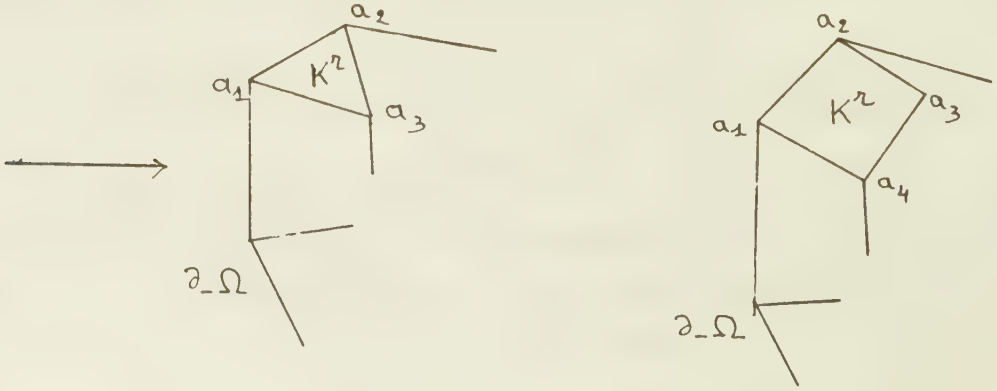


Figure 1.6

Dans le cas triangulaire (resp. quadrilatéral), le côté $[a_1, a_3]$ (resp. $[a_1, a_4]$) de K^r est un sous-ensemble de $\partial_+ K^r$. De plus le côté $[a_2, a_3]$ est aussi un sous-ensemble de $\partial_+ K^r$. Sinon K^r ne serait pas le dernier élément frontalier de $\partial_- \Omega$. On obtient donc $\partial_- K^r = [a_1, a_2] \subset \partial_- \Omega$, ce qui a été exclu plus haut. Il existe donc un élément frontalier K tel que $\partial_- K \subset \partial_- \Omega$
Maintenant, soit K_1 un élément frontalier de $\partial_- \Omega$ tel que $\partial_- K_1 \subset \partial_- \Omega$
On définit $\Omega_1 = \Omega - \Omega \bigcap K_1$.
Chaque face incluse dans $\partial_- \Omega_1$ est soit un sous-ensemble de $\partial_- \Omega$, soit un sous-ensemble de $\partial_+ K_1$. D'après ce qui a été démontré précédemment, il existe un élément frontalier K_2 correspondant à $\partial_- \Omega_1$ et tel que $\partial_- K_2 \subset \partial_- \Omega_1$ etc. En réitérant ce procédé, on prend en compte tous les éléments de et on obtient un classement de ces éléments dans l'ordre $K_1, K_2, \cdots, K_N$ tel que les conclusions du Lemme 1.2 soient satisfaites.

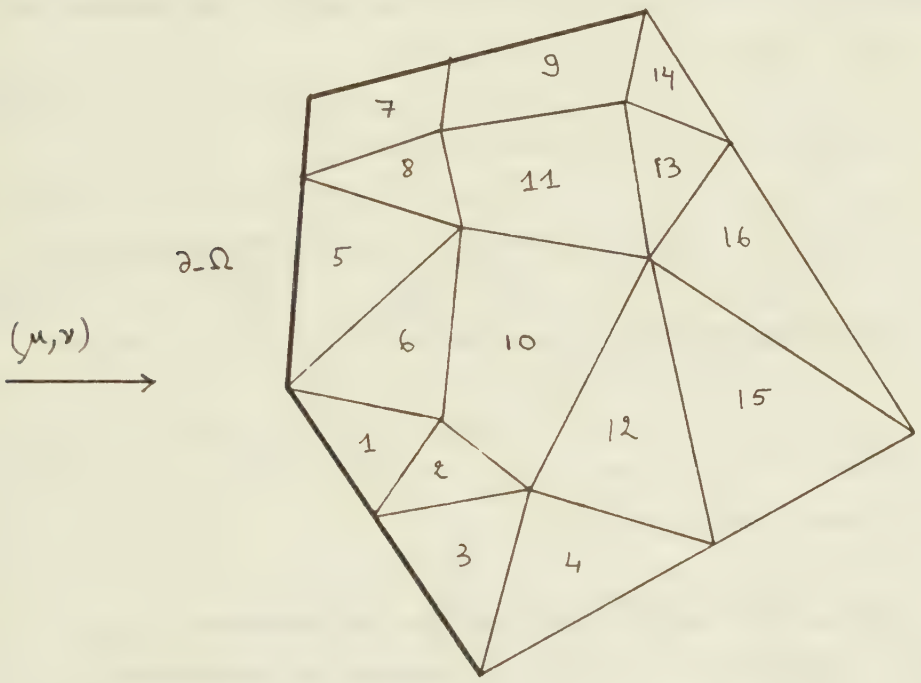


Figure 1.7 - Un exemple de numérotation

Remarque 1.7 : La numérotation des éléments $1, \cdots, N$ n'est pas nécessairement unique, comme le montre la figure 1.6. Ceci est d'ailleurs le cas dès qu'il existe au moins deux éléments frontaliers K^1 et K^2 relatifs à $\partial_- \Omega$ et tels que :

$$\partial_- K^1 \subset \partial_- \Omega \text{ et } \partial_- K^2 \subset \partial_- \Omega$$

III.2 - Méthodes d'éléments finis continues

On définit les méthodes continues dans le cas général ([27], [30], [42]) et on considère ensuite particulièrement le cas où les éléments finis sont des quadrilatères convexes. Si les éléments finis sont des rectangles et si l'espace P_K des fonctions de forme est l'espace P_1 (resp. Q_1) on retrouve le schéma DSN [22] (resp. SNG [21]). On envisage ici la généralisation au cas où les quadrilatères sont quelconques et (ou) l'espace P_K est construit à partir des polynômes de Q_k, et on montre que si certaines conditions de stabilité sont satisfaites, l'erreur entre la solution exacte (supposée suffisamment régulière) et la solution approchée, mesurée par une norme discrète, est de l'ordre de h^{k+1}.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\bar{\Omega}$ en éléments finis K et soit P_K un espace de dimension finie défini sur K pour $K \in \mathcal{T}_h$. On pose

M_K = nombre de noeuds de K non situés sur ∂K

On se donne un ensemble $\{v_j\}_{j=1}^{M_K}$ de M_K fonctions tests linéairement indépendantes.

Définition 2.1 : Méthodes continues : On cherche $u_h \in P_K$, tel que

$$\int_K (Au_h - f)\, v_j \, dx\, dy = 0 \quad , \text{ pour } 1 \le j \le M_K \quad , \tag{2.1}$$

$$u_h \text{ donné aux noeuds situés sur } \partial K \tag{2.2}$$

En pratique, on est amené à calculer les intégrales intervenant dans l'égalité (2.1) de façon approchée en utilisant la formule de quadrature :

$$\int_K g\, dx dy \sim \sum_{\ell=1}^{N_K} \omega_{\ell,K}\, g(b_{\ell,K}) \quad , \tag{2.3}$$

où les points $b_{\ell,K}$ appartiennent à K et les poids $\omega_{\ell,K}$ sont positifs, $1 \le \ell \le N_K$

L'équation (2.1) s'écrit alors :

$$\sum_{\ell=1}^{N_K} \omega_{\ell,K} \left((Au_h - f)v_j\right)(b_{\ell,K}) = 0 \quad , \quad 1 \le j \le M_K \ . \tag{2.4}$$

Lemme 2.1 : Une condition suffisante pour que le schéma (2.4) satisfasse de façon discrète une propriété de conservation des particules est que les trois hypothèses suivantes soient à la fois vérifiées :

(i) La fonction constante est une combinaison linéaire des fonctions v_j, $1 \le j \le M_K$.

(ii) L'intégrale $\int_K \left(\mu \frac{\partial v_k}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_k}{\partial y}\right) dx dy$ est calculée de façon exacte, pour tout $v_k \in P_K$.

(iii) Pour tout $v_k \in P_K$ et pour toute face incluse dans ∂K, l'intégrale de v_k le long de cette face est entièrement déterminée par les valeurs de v_k aux noeuds situés sur cette face.

Détermination : D'après l'hypothèse (i), on peut remplacer v_j par la constante un dans l'égalité (2.1), et on a :

$$(2.5) \qquad \sum_{\ell=1}^{N_K} \omega_{\ell,K} \left(A u_k - f\right)(b_{\ell,K}) = 0 \quad .$$

D'après l'hypothèse (ii), il vient :

$$(2.6) \qquad \int_K \left(\mu \frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_k}{\partial y}\right) dx dy + \sum_{\ell=1}^{N_K} \omega_{\ell,K} (\sigma u_k - f)(b_{\ell,K}) = 0 ,$$

ou encore :

$$(2.7) \qquad \int_{\partial_+ K} (\mu n_x + \nu n_y) u_k \, ds + \sum_{\ell=1}^{N_K} \omega_{\ell,K} (\sigma u_k)(b_{\ell,K}) =$$

$$= -\int_{\partial_- K} (\mu n_x + \nu n_y) u_k \, ds + \sum_{\ell=1}^{N_K} \omega_{\ell,K} f(b_{\ell,K}) .$$

L'hypothèse (iii) et l'égalité (2.7) expriment de façon discrète la conservation des neutrons.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que le domaine $\bar{\Omega}$ est triangulé en quadrilatères convexes K de diamètre $\le h$ (figure 2.1) tels que d'un sommet appartenant à Ω soient issus quatre côtés, et on fait l'hypothèse (de stabilité) suivante :

$$(2.8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Tous les quadrilatères } K \in \mathcal{C}_h \text{ ont deux et seulement} \\ \\ \text{deux faces éclairées.} \end{array} \right.$$

Soit $F_K \in (Q_1)^2$ la transformation qui envoie le carré de référence $\hat{K} = [-1,+1] \times [-1,+1]$ sur le quadrilatère K (figure 2.2), on a, en posant $(x,y) = F_K(\xi,\eta)$:

$$(2.9)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_4 \\ y = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_4 \end{cases}$$

où les (x_i, y_i) sont les coordonnées des sommets a_i, $1 \le i \le 4$ du quadrilatère K

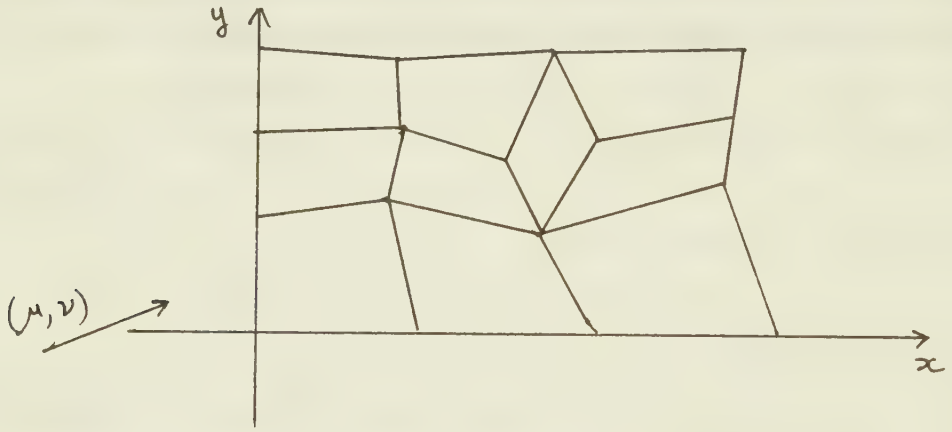
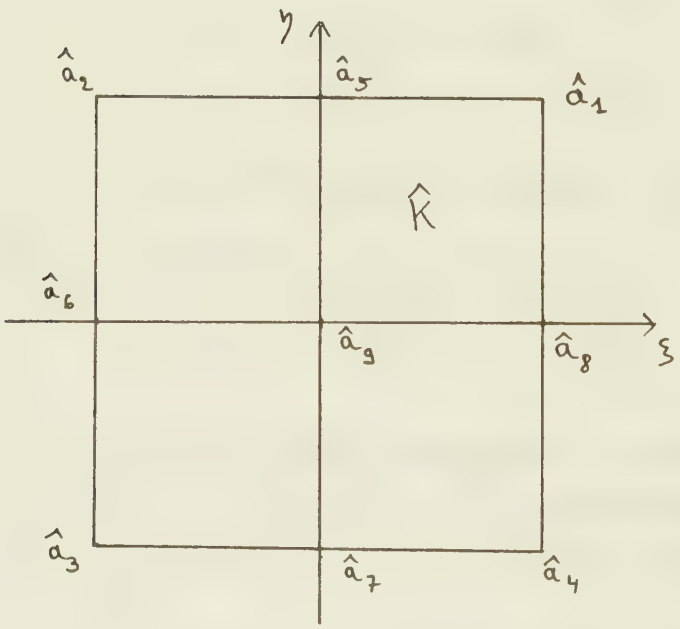


Figure 2.1 - Triangulation satisfaisant l'hypothèse (2.8)



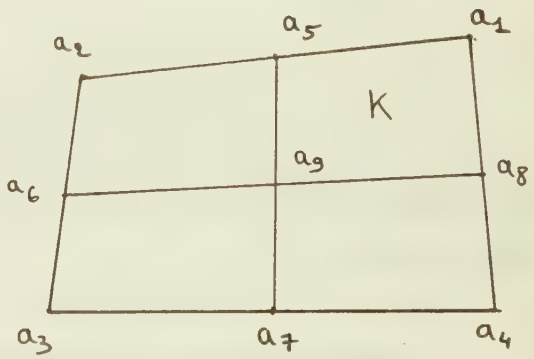


Figure 2.2

On considère dans ce paragraphe deux éléments finis quadrilatéraux décrits au Chapitre 0 :

Le quadrilatère de type k, caractérisé par le triplet (K, Σ_K, P_K) où,

(2.10) $$\Sigma_K = F_K\left(\hat{\Pi}_{H}{}_{k}\right), \quad \hat{\Pi}_{H}{}_{k} \text{ étant défini en (0.55),}$$

(2.11) $$P_K^k = \left\{ p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \quad ; \quad \forall \hat{p} \in Q_k \right\} .$$

Le quadrilatère non conforme, caractérisé par le triplet $\left(K, \Sigma_K', P_K'\right)$ où,

(2.12) $$\Sigma_{K'} = \left\{ a_i \right\}_{i=5}^{8} ,$$

(2.13) $$P_K' = \left\{ p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \quad ; \quad \forall \hat{p} \in P_1 \right\} ,$$

et on a la relation :

(2.14) $$p(a_5) + p(a_7) = p(a_6) + p(a_8) = 2\, p(a_9) .$$

Comme au Chapitre 0, on définit l'espace V_k^k (resp. V_k') des fonctions dont la restriction à chaque élément K appartient à P_K^k (resp. P_K') et qui sont continues aux noeuds de la triangulation. On a l'inclusion :

$$V_k^k \subset C^0(\bar{\Omega}) \bigcap H^1(\Omega) ,$$

mais en général, on n'a pas l'inclusion $V_k' \subset C^0(\bar{\Omega})$.
On pose :

(2.15) $$X_k^k \left(\text{resp. } X_k'\right) = \left\{ v_k \in V_k^k \left(\text{resp. } V_k'\right) ; v_k = 0 \text{ aux noeuds situés sur } \partial\Omega \right\}$$

Lorsque l'élément fini utilisé dans la méthode continue (2.1), (2.2) est le quadrilatère de type k, la relation (2.2) et l'hypothèse (2.8) impliquent que l'on connaisse déjà $2k+1$ valeurs de la solution approchée u_k. Il reste donc un nombre d'inconnues égal à $(k+1)^2 - 2k - 1 = k^2 = \dim P_K^{k-1}$.
On peut choisir l'espace P_K^{k-1} comme l'espace des fonctions tests.

Lorsqu'on utilise le quadrilatère non conforme, deux valeurs de la solution approchée sont déjà connues (figure 2.4), et compte tenu de la relation (2.14), il reste une seule inconnue à déterminer. On choisit (pour satisfaire l'hypothèse (i) du Lemme 2.1) la fonction test égale à un.

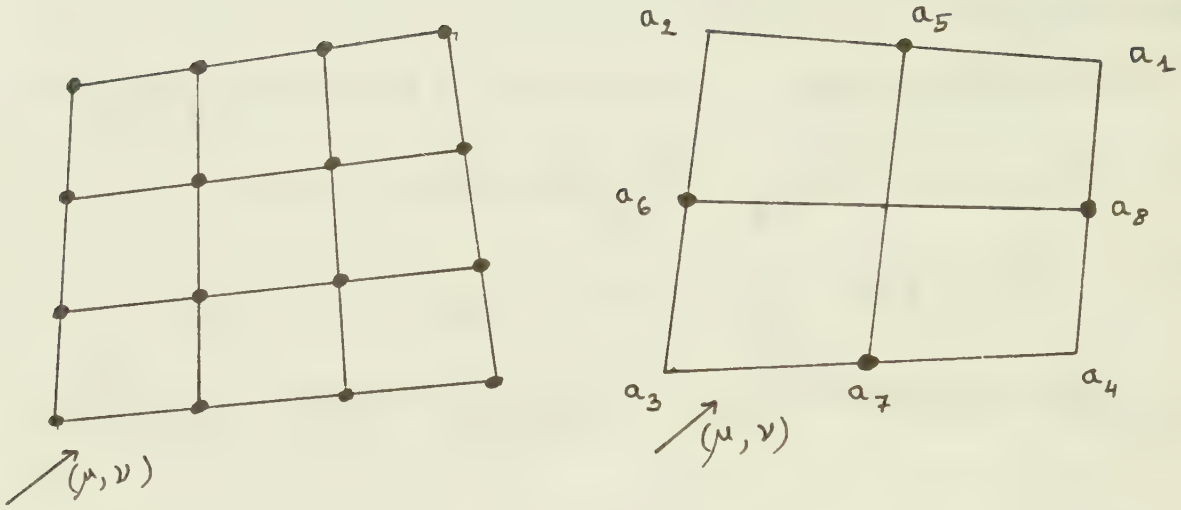


Figure 2.3 { Quadrilatère de type k (k=3), 9 inconnues
Quadrilatère non conforme, 1 inconnue

La formule de quadrature (2.3) peut être construite de la façon suivante. On se donne sur le segment $[-1,+1]$ la formule de quadrature :

$$(2.16) \qquad \int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi \sim \sum_{i=1}^{k} \hat{w}_i\, f(\hat{g}_i) \quad ,$$

où les $\hat{g}_i$, $1 \le i \le k$, sont les abscisses de GAUSS LEGENDRE [17] et les $\hat{w}_i$ sont les poids (positifs) tels que la formule (2.16) soit exacte pour les polynômes de P_{2k-1} . Sur le carré $\hat{K}$, on peut écrire la formule de quadrature suivante, exacte pour les polynômes de Q_{2k-1}

$$(2.17) \qquad \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \sim \sum_{i,j=1}^{k} \hat{w}_i \hat{w}_j\, f(\hat{g}_i,\hat{g}_j) \quad ,$$

et sur l'élément fini K , il vient :

$$(2.18) \qquad \int_K f(x,y)\, dx dy \sim \sum_{i,j=1}^{k} w_{ij}^K\, f(g_{ij}^K) \quad ,$$

$$w_{ij}^K = J_K(\hat{g}_i,\hat{g}_j)\, \hat{w}_i \hat{w}_j \quad , \quad g_{ij}^K = F_K(\hat{g}_{ij}) \quad , \quad \hat{g}_{ij} = (\hat{g}_i, \hat{g}_j) \; .$$

On peut maintenant définir les méthodes continues suivantes :

Schéma 1 (Schéma DSN généralisé) : Trouver $u_h \in X_h'$ tel que :

(2.19) $\quad \text{aire } K\,(Au_h - f)(G_K) = 0 \qquad$, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$,

où G_K désigne l'image par F_K du point de coordonnées $\xi = \eta = 0$, ou de façon équivalente :

(2.20) $\quad (Au_h - f)(G_K) = 0 \qquad$, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$.

Schéma 2 : Trouver $u_h \in X_h^k$ tel que, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$

(2.21) $\quad \int_K (Au_h - f)\, v_h \, dx\, dy = 0 \qquad$, pour tout $v_h \in P_K^{k-1}$.

Schéma 3 (Schéma S.N.G. généralisé): Trouver $u_h \in X_h^k$ tel que, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$

(2.22) $\quad \sum_{i,j=1}^{k} w_{ij}^K \left((Au_h - f)v_h\right)(q_{ij}^K) = 0 \qquad$, pour tout $v_h \in P_K^{k-1}$

où de façon équivalente

(2.23) $\quad (Au_h - f)(q_{ij}^K) = 0 \qquad , \quad 1 \le i, j \le k$

Remarque 2.1 : L'équation (2.22) se déduit de l'équation (2.21) en utisant la formule de quadrature (2.18).

On peut écrire de façon explicite le Schéma 1 et le Schéma 3 pour $k = 1$ en utilisant les formules suivantes :

(2.24) $\quad J_K \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} - \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}$,

(2.25) $\quad J_K \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}$,

où $\quad \hat{v}(\xi, \eta) = v(x, y) \quad$, avec $\quad (x, y) = F_K(\xi, \eta)$.

Le Schéma 1 peut encore s'écrire, sur chaque quadrilatère K de sommets $a_i = (x_i, y_i)$, $1 \le i \le 4$, avec $u_h(a_i) = u_i$, $5 \le i \le 9$:

(2.26) $\quad (u_8 - u_6)\left(\mu(y_1 + y_2 - y_3 - y_4) - \nu(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)\right) +$

$\quad + (u_5 - u_7)\left(-\mu(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) + \nu(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)\right) +$

$\quad + \left((y_1 - y_3)(x_2 - x_4) + (y_2 - y_4)(x_1 - x_3)\right)\left(\sigma(a_9)u_9 - f(a_9)\right) = 0$,

(2.27) $\quad u_6 + u_8 = u_5 + u_7 = 2u_9$.

En particulier, lorsque le quadrilatère K est un rectangle dont les côtés a_1a_4 et a_2a_3 (resp. a_2a_1 et a_3a_4) sont parallèles à l'axe des y (resp. des x) et sont de longueur égale à Δy (resp. Δx), il vient :

$$(2.28)\qquad \mu\,\frac{u_8-u_6}{\Delta x}+\nu\,\frac{u_5-u_7}{\Delta y}+\sigma(a_9)\,u_9=f(a_9)\ ,$$

$$u_6+u_8=u_5+u_7=2u_9\ ,$$

ce qui n'est pas autre chose que le schéma D.S.N. ([21]).

Le Schéma 3, pour $k=1$, peut s'écrire, avec $u_k(a_i)=u_i$, $1\le i\le 4$:

$$(2.29)\quad (u_1-u_3)\big(\mu(y_2-y_4)-\nu(x_2-x_4)\big)+(u_2-u_4)\big(-\mu(y_1-y_3)+\nu(x_1-x_3)\big)+$$

$$+\Big((y_1-y_3)(x_4-x_2)+(y_2-y_4)(x_1-x_3)\Big)\Big(\sigma(a_9)\,\frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{4}-f(a_9)\Big)=0$$

Lemme 2.2 : Les schémas 1, 2 et 3 satisfont les hypothèses du Lemme 2.1 ; la conservation des neutrons est donc vérifiée de façon discrète.

Démonstration : On considère d'abord le schéma 1. Les relations (2.24) et (2.25) entraînent que l'expression $J_K\left(\mu\,\frac{\partial v_k}{\partial x}+\nu\,\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)$ est un polynôme de Q_1 pour les variables ξ et η. On en déduit que l'hypothèse (ii) est satisfaite, c'est-à-dire :

$$\text{aire } K\left(\mu\,\frac{\partial v_k}{\partial x}+\nu\,\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)(b_K)=\int_K\left(\mu\,\frac{\partial v_k}{\partial x}+\nu\,\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)dx\,dy\ ,$$

pour tout $v_k\in P_K'$.

D'autre part, le long d'une face quelconque de K, toute fonction v_k de P_K' est un polynôme de P_1 et l'intégrale de v_k le long de cette face ne dépend que de la valeur de v_k au milieu de cette face, et l'hypothèse (iii) est satisfaite. Pour le schéma 2, les hypothèses (i) et (ii) sont évidemment satisfaites. D'autre part, la restriction d'une fonction v_k de P_K^k à une face quelconque de l'élément K est un polynôme de degré $\le k$ entièrement déterminé par ses valeurs aux noeuds situés sur cette face, et l'hypothèse (iii) est ainsi satisfaite.

Lorsque $v_k\in P_K^k$, l'expression $J_K\left(\mu\,\frac{\partial v_k}{\partial x}+\nu\,\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)$ est un polynôme de Q_k dans les variables ξ et η. La formule de quadrature (2.17) étant exacte pour les polynômes de Q_{2k-1}, on en déduit que l'hypothèse (ii) est satisfaite pour le schéma 3, c'est-à-dire :

$$\sum_{i,j=1}^{k} w_{ij}^K\left(\mu\,\frac{\partial v_k}{\partial x}+\nu\,\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)\left(b_{ij}^K\right)=\int_K\left(\mu\,\frac{\partial v_k}{\partial x}+\nu\,\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)dx\,dy\ ,$$

pour tout $K\in P_K^k$. L'hypothèse (iii) est vérifiée comme dans le cas du schéma 2.

Pour donner des résultats d'existence et de stabilité des solutions des schémas 1, 2 et 3, nous avons besoin de définir les normes et semi normes discrètes suivantes :

On définit $|\cdot|_{h,K,k}$ et $|\cdot|_{h,k}$ par

$$|v|^2_{h,K,k} = \sum_{i,j=1}^{k} w_{ij}^K \left(v(q_{ij}^K)\right)^2 ,$$

$$|v|^2_{h,k} = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} |v|^2_{h,K,k} ,$$

et on note $(\cdot,\cdot)_{h,K,k}$ et $(\cdot,\cdot)_{h,k}$ les produits scalaires correspondants. On omettra l'indice k toutes les fois qu'il n'y aura pas ambiguïté.

Soit S une face quelconque incluse dans la frontière $\partial\Omega$. On considère sur S la formule de quadrature, exacte pour les polynômes de P_{2k-1}, utilisant les points de GAUSS-LEGENDRE B_i, et les poids w_i correspondants, $1 \le i \le k$

$$\int_S f(\sigma)\, d\sigma \sim \sum_{i=1}^{k} w_i f(B_i) .$$

On définit $\langle\cdot\rangle_{h,S,k}$ et $\langle\cdot\rangle_{h,k}$ par

$$\langle v\rangle^2_{h,S,k} = \sum_{i=1}^{k} w_i \left(v(B_i)\right)^2 ,$$

$$\langle v\rangle^2_{h,k} = \sum_{S \subset \partial\Omega} \langle v\rangle^2_{h,S,k}$$

et on note $\langle\cdot,\cdot\rangle_{h,S,k}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_{h,k}$ les produits scalaires correspondants.

On considère les hypothèses suivantes :

Hypothèses H_1 : Pour tout élément $K \in \mathcal{C}_h$, on a l'inégalité

(2.30) $$Z_K \le c\, h_K^2 .$$

Hypothèse H_2 : Soient A_i, $1 \le i \le 4$, les sommets d'un élément quelconque K de $\mathcal{C}_h$, on a les inégalités :

(2.31) $$|\mu(y_1-y_2+y_3-y_4) - \nu(x_1-x_2+x_3-x_4)| \le$$
$$\le c_0 h_K |\mu(y_1-y_4+y_2-y_3) - \nu(x_1-x_4+x_2-x_3)| ,$$

(2.32) $$|\mu(y_1-y_2+y_3-y_4) - \nu(x_1-x_2+x_3-x_4)| \le$$
$$\le c_0 h_K |\mu(y_1-y_2+y_4-y_3) - \nu(x_1-x_2+x_4-x_3)| ,$$

pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, la constante C_o étant indépendante de $\mathcal{C}_h$

Remarque 2.2 : Soit h_o un réel tel que $0 < h_o < \frac{1}{C_o}$. L'hypothèse H_2 implique que si on a $h \leq h_o$, les deux angles formés par la direction caractéristique (μ, ν) et deux côtés opposés $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_4A_3}$ (ou $\overrightarrow{A_2A_3}$ et $\overrightarrow{A_1A_4}$) sont soit de même signe, ou bien sont tous les deux égaux à zéro. Cette hypothèse n'est pas équivalente à l'hypothèse (2.8) et permet de prendre en compte le cas où un élément a deux côtés parallèles à la caractéristique.

Lemme 2.3 : On suppose que l'hypothèse H_2 est satisfaite et que h est suffisamment petit. Les sommets $a_i = (x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 4$ d'un élément quelconque K de $\mathcal{C}_h$ peuvent toujours être numérotés de telle sorte que les côtés éclairés soient a_2a_3 et a_3a_4 (figure 2.3).
Pour tout $v_h \in X_h'$, on peut alors écrire, en posant $v_i = v_h(a_i)$, $5 \leq i \leq 8$:

$$(2.33)\quad 2\,\text{aire}\,K\left(\left(\mu\frac{\partial v_h}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_h}{\partial y}\right)v_h\right)(G_K) \geq$$

$$\frac{1-3C_oh_K}{1-C_oh_K}\left(\mu(y_1-y_4)-\nu(x_1-x_4)\right)v_8^2 +$$

$$+\frac{1-3C_oh_K}{1-C_oh_K}\left(\mu(y_2-y_1)-\nu(x_2-x_1)\right)v_5^2 +$$

$$+\frac{1+C_oh_K}{1-C_oh_K}\left(\mu(y_3-y_2)-\nu(x_3-x_2)\right)v_6^2 +$$

$$+\frac{1+C_oh_K}{1-C_oh_K}\left(\mu(y_4-y_3)-\nu(x_4-x_3)\right)v_7^2 \Big)$$

où C_o est la constante intervenant dans l'hypothèse 2.2.
On en déduit que le schéma 1 a une solution unique u_h telle que :

$$(2.34)\quad |u_h|_{h,1} + \langle |\mu n_x + \nu n_y|^{1/2} u_h \rangle_{h,1} \leq C|g|_{h,1} \Big)$$

où la constante C est indépendante de h .

Démonstration : En utilisant les notations de la figure 2.4, on peut écrire pour tout $v_h \in X_h'$

$$(2.35)\quad \text{aire}\,K\left(\left(\mu\frac{\partial v_h}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_h}{\partial y}\right)v_h\right)(G_K) = \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2}\left(\mu(y_{i+1}-y_i)-\nu(x_{i+1}-x_i)\right)v_{i+4}^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\mu(y_1-y_2+y_3-y_4)-\nu(x_1-x_2+x_3-x_4)\right)\left((v_5-v_7)^2-(v_8-v_6)^2\right),$$

où on a noté $x_5 = x_1$, $y_5 = y_1$.

Lorsque l'expression $\mu(y_1-y_2+y_3-y_4) - \nu(x_1-x_2+x_3-x_4)$ est positive (resp. négative), on majore le terme $(v_8-v_6)^2$ par $2v_8^2+2v_6^2$ (resp. $(v_5-v_7)^2$ par $2v_5^2+2v_7^2$)).

L'inégalité (2.33) se déduit de la relation (2.35) en utilisant l'hypothèse H_2, inégalité (2.31) (resp. 2.32)).

Lorsque l'on a $\tau(x,y) \geq \alpha > 0$ (et on peut toujours se ramener à cette situation d'après la remarque 1.5), on peut écrire :

$$(2.36) \qquad \int_K \tau v_h^2 \, dx\,dy \geq c\, h_K^2 \left(v(G_K)\right)^2 .$$

En combinant les inégalités (2.35) et (2.36) pour tous les éléments K de $\mathcal{C}_h$ on obtient, en remplaçant v_h par u_h

$$|u_h|_{h,1}^2 + \langle |\mu n_x + \nu n_y|^{1/2} u_h \rangle_{h,1}^2 \leq c\, |(f, u_h)_{h,1}| ,$$

d'où l'on déduit l'existence de la solution u_h et la majoration (2.34).

Remarque 2.3 : L'hypothèse H_1 n'est pas en général suffisante pour garantir la stabilité du schéma 1, comme le montre l'exemple décrit sur la figure 2.4

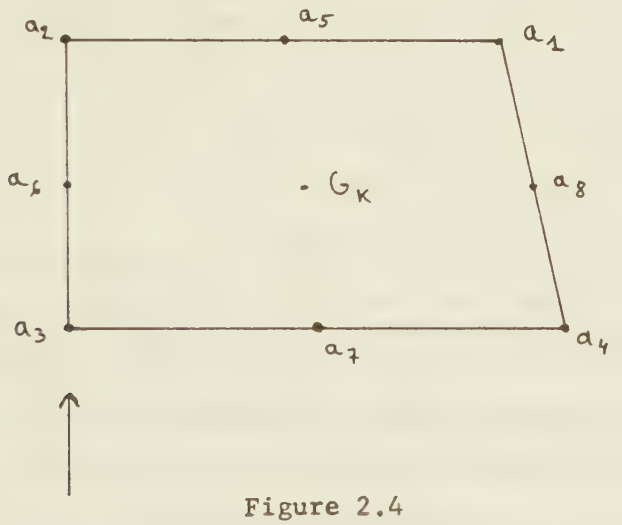


Figure 2.4

La direction caractéristique est parallèle au côté a_2a_3 et le quadrilatère est très voisin d'un rectangle. On a l'égalité $\mu(y_2-y_3) - \nu(x_2-x_3) = 0$

On en déduit que

$$\text{aire } K\left(\left(\mu\frac{\partial v_h}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_h}{\partial y}\right) v_h\right)(G_K) \geq \tfrac{1}{2}\left(\mu(y_2-y_4) - \nu(x_2-x_4)\right)\left(v_8^2 - \tfrac{1}{2}(v_8-v_6)^2\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\mu(y_2-y_1) - \nu(x_2-x_1)\right) v_5^2 - \tfrac{1}{2}\left(\mu(y_3-y_4) - \nu(x_3-x_4)\right) v_7^2 .$$

Le terme $(v_8-v_6)^2$ nous empêche alors d'affirmer que le schéma 1 est stable.

On va considérer le schéma 2 dans le cas où le domaine Ω est le carré $[0,1]^2$, triangulé en rectangles $K_{\ell m}$ à côtés parallèles aux axes, de sommets $A_{\ell,m}$, $A_{\ell+1,m}$, $A_{\ell,m+1}$, $A_{\ell+1,m+1}$, où $A_{\ell m}$ est le point de coordonnées $x_\ell = \ell \Delta x$, $y_m = m \Delta y$, $0 \le \ell \le L$, $0 \le m \le M$, avec $L \Delta x = M \Delta y = 1$.

Soit K un élément quelconque de $\mathcal{C}_h$. A toute fonction v de $L^2(K)$, on associe sa projection $\Pi_K^k v$ définie par :

$$\int_K (v - \Pi_K^k v)\, w \, dx\, dy = 0 \quad , \quad \forall w \in Q_k \ . \tag{2.37}$$

A toute fonction v de $L^2(x_\ell, x_{\ell+1})$, on associe sa projection $\Pi_x^k v$ définie par :

$$\int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} (\Pi_x^k v - v)\, w \, dx = 0 \quad , \quad \forall w \in P_k \ . \tag{2.38}$$

On définit de même $\Pi_y^k v$, à partir de $v \in L^2(y_m, y_{m+1})$. Soit maintenant une fonction $v(x,y)$ continue sur $K_{\ell,m}$, on peut définir les projections $(\Pi_x^k v)(y)$ et $(\Pi_y^k v)(x)$ à y et x fixés, respectivement, et on a :

$$\Pi_x^k \Pi_y^k v = \Pi_y^k \Pi_x^k v = \Pi_{K_{\ell m}}^k v \ . \tag{2.39}$$

Enfin, à toute fonction v de $L^2(\Omega)$, (resp. de $L^2(0,1)$), on associe sa projection $\Pi_h v$ (resp. $\Pi^k v$), fonction dont la restriction à chaque élément K (resp. intervalle $]x_\ell, x_{\ell+1}[$) est égale à $\Pi_K^k v$ (resp. $\Pi_x^k v$).

Lemme 2.4 : On suppose que le domaine Ω est le carré $(]0,1[)^2$, triangulé comme ci-dessus. Le schéma 2 admet une solution unique u_h telle que :

$$|\Pi_{k-1} u_h|_{L^2(\Omega)} + \left| |\mu n_x + \nu n_y|^{1/2} (\Pi^{k-1} u_h) \right|_{L^2(\partial\Omega)} \le C |f|_{L^2(\Omega)} \ , \tag{2.40}$$

où la constante C ne dépend pas de h

Démonstration : Dans l'égalité (2.21), on peut remplacer v_h par $\Pi_{k-1} u_h$ soit :

$$\int_K (Au_h - f)\, \Pi_{k-1} u_h \, dx\, dy = 0 \quad , \text{ pour tout } K \in \mathcal{C}_h \ .$$

Pour toute fonction v_h de Q_k, $\frac{\partial v_h}{\partial x}$ est un polynôme de degré $\le k-1$ en x et de degré $\le k$ en y. Il vient donc :

$$\int_K \frac{\partial v_h}{\partial x}\left(\Pi_{k-1} v_h\right) dx\,dy = \int_K \frac{\partial v_h}{\partial x}\left(\Pi_x^{k-1}\cdot\Pi_y^{k-1} v_h\right) dx\,dy = \int_K \frac{\partial v_h}{\partial x}\left(\Pi_y^{k-1} v_h\right) dx\,dy ,$$

d'où :

$$\int_K \frac{\partial v_h}{\partial x}\left(\Pi_{k-1} v_h\right) dx\,dy = \int_K \left(\Pi_y^{k-1}\frac{\partial v_h}{\partial x}\right)\left(\Pi_y^{k-1} v_h\right) dx\,dy .$$

D'autre part, on montrera aisément que pour toute fonction $v \in C^1(K)$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi_y^{k-1} v\right) = \Pi_y^{k-1}\frac{\partial v}{\partial x} .$$

Des deux dernières égalités, on déduit, pour tout $v_h \in Q_k$

$$\int_K \frac{\partial v_h}{\partial x}\left(\Pi_{k-1} v_h\right) dx\,dy = \int_K \frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi_y^{k-1} v_h\right)\cdot \Pi_y^{k-1} v_h\, dx\,dy .$$

On a donc :

$$(2.41)\quad \int_K (A u_h)\,\Pi_{k-1} u_h\, dx\,dy = \mu\int_K \frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi_y^{k-1} u_h\right)\cdot\left(\Pi_y^{k-1} u_h\right) dx\,dy +$$

$$+\nu\int_K \frac{\partial}{\partial y}\left(\Pi_x^{k-1} u_h\right)\cdot\left(\Pi_x^{k-1} u_h\right) dx\,dy + \sigma\int_K \left(\Pi_{k-1} u_h\right)^2 dx\,dy = \int_K f\left(\Pi_{k-1} u_h\right) dx\,dy$$

En sommant les égalités telles que (2.41) pour tous les rectangles du domaine Ω et en utilisant l'inégalité de SCHWARZ, on obtient l'inégalité (2.40).

On considère ensuite le schéma 3 dans le cas où le domaine Ω est triangulé en quadrilatères convexes quelconques satisfaisant l'hypothèse (2.8).

Lemme 2.5 : On suppose que les hypothèses H_1 et H_2 sont satisfaites. Alors le schéma 3 a une solution unique u_h telle que :

$$(2.42)\quad |u_h|_{h,k} + \langle |\mu n_x + \nu n_y|^{1/2} u_h\rangle_{h,k} \le C\,|f|_{h,k} ,$$

où la constante C ne dépend pas de h

Démonstration : On multiplie l'égalité (2.23) par $u_h\left(g_{i,j}^K\right) w_{ij}^K$ et on somme pour tous les indices i et j, $1 \le i,j \le k$. Il vient :

$$(2.43)\qquad \sum_{i,j=1}^{k} w_{ij}^{K}\,(Au_k - f)\,u_k(g_{ij}^{K}) = 0 \quad ,$$

pour tout $K \in \mathcal{C}_k$.

Soit F_K la transformation définie en (2.9). On définit :

$$\hat{u}_k(\xi,\eta) = u_k(x,y) \quad , \qquad \text{avec} \quad (x,y) = F_K(\xi,\eta) \ .$$

En utilisant les relations (2.24) et (2.25), on peut écrire :

$$X = \sum_{i,j=1}^{k} w_{ij}^{K}\, u_k \frac{\partial u_k}{\partial x}(\cdot\, {}^{K}_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{k} \hat{w}_i \hat{w}_j \left(\hat{u}_k\left(\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right)(g_i, g_j)$$

On a :

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(y_1+y_2-y_3-y_4) + \frac{\xi}{4}(y_1-y_2+y_3-y_4) \ .$$

Le polynôme $\hat{u}_k \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \xi}$ est de degré $\leq 2k-1$ pour la variable ξ .

Les g_i , $1 \leq i \leq k$, étant les abscisses de GAUSS LEGENDRE, et
les $\hat{w}_i$, $1 \leq i \leq k$, étant les poids associés, il vient :

$$\sum_{i,j=1}^{k} \hat{w}_i \hat{w}_j \left(\hat{u}_k \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)(g_i,g_j) = \frac{1}{4}(y_1+y_2-y_3-y_4)\sum_{j=1}^{k} \hat{w}_j \int_{-1}^{+1} \left(\hat{u}_k \frac{\partial}{\partial \xi}\hat{u}_k\right)(\xi, g_j)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{4}(y_1-y_2+y_3-y_4)\sum_{i,j=1}^{k} \hat{w}_i \hat{w}_j \left(\hat{u}_k \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \xi}\,\xi\right)(g_i,g_j) \ .$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{4}(y_1+y_2-y_3-y_4)\sum_{j=1}^{k} \hat{w}_j \int_{-1}^{+1} \left(\hat{u}_k \frac{\partial}{\partial \xi}\hat{u}_k\right)(\xi, g_j)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{4}(y_1-y_4)\sum_{j=1}^{k} \hat{w}_j\, \hat{u}_k^2(1,g_j) + \frac{1}{4}(y_3-y_2)\sum_{j=1}^{k} \hat{w}_j\, \hat{u}_k^2(-1,g_j) -$$

$$- \frac{1}{8}(y_1-y_2+y_3-y_4)\sum_{j=1}^{k} \hat{w}_j \left(\hat{u}_k^2(1,g_j) + \hat{u}_k^2(-1,g_j)\right) \ .$$

En combinant les deux dernières égalités, il vient :

$$\sum_{i,j=1}^{k} \hat{w}_i \hat{w}_j \left(\hat{u}_k \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{u}_k)\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)(g_i, g_j) =$$

$$= \frac{1}{4}(y_1 - y_4) \sum_{j=1}^{k} \hat{w}_j \hat{u}_k^2(1, g_j) + \frac{1}{4}(y_3 - y_2) \sum_{j=1}^{k} \hat{w}_j \hat{u}_k^2(-1, g_j) +$$

$$+ \frac{1}{8}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\left(2 \sum_{i,j=1}^{k} \hat{w}_i \hat{w}_j \left(\hat{u}_k \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{u}_k)\right)(g_i, g_j) - \sum_{j=1}^{k} \hat{w}_j \left(\hat{u}_k^2(1, g_j) + \hat{u}_k(-1, g_j)\right)\right).$$

Si on développe de façon analogue l'expression $\sum_{i,j=1}^{k} \hat{w}_i \hat{w}_j \left(\hat{u}_k \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)(g_i, g_j)$,

puis l'expression $\sum_{i,j=1}^{k} w_{ij}^K \left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial y}\right)(g_{ij}^K)$, on obtient :

$$(2.44) \sum_{i,j=1}^{k} w_{ij}^K \left(\mu \frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_k}{\partial y}\right) u_k(g_{ij}^K) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \frac{\mu(y_{i+1} - y_i) - \nu(x_{i+1} - x_i)}{|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}|} < u_k >^2_{k, A_i A_{i+1}, k} +$$

$$+ \delta\left(2 \sum_{i,j=1}^{k} \hat{w}_i \hat{w}_j \hat{u}_k \left(\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \xi}\xi - \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \eta}\eta\right)(g_i, g_j)\right) +$$

$$+ \delta\left(-\sum_{j=1}^{k} \hat{w}_j \left(\hat{u}_k^2(1, g_j) + \hat{u}_k^2(-1, g_j)\right) + \sum_{i=1}^{k} \hat{w}_i \left(\hat{u}_k^2(g_i, 1) + \hat{u}_k^2(g_i, -1)\right)\right),$$

où $\delta = \frac{1}{8}\left(\mu(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) - \nu(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\right)$.

La relation (2.44) et les hypothèses H_1 et H_2 entraînent qu'il existe des constantes c_i , $1 \leq i \leq 4$, indépendantes du quadrilatère K , telles que :

$$(2.45) \sum_{i,j=1}^{k} w_{ij}^K (A u_k) u_k(g_{ij}^K) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \frac{\mu(y_{i+1} - y_i) - \nu(x_{i+1} - x_i)}{|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}|} (1 + c_i h_K) < u_k >^2_{k, A_i A_{i+1}, k} +$$

$$+ c\, |u_k|^2_{k, K} \quad)$$

où C est une constante > 0 indépendante de h , et où on a :

$$\left(\mu(y_{i+1} - y_i) - \nu(x_{i+1} - x_i)\right) c_i < 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq 4$$

De l'inégalité précédente, on déduit l'existence d'une solution unique u_h pour le schéma 3. En combinant les relations (2.43) et (2.45) pour tous les quadrilatères $K \in \mathcal{C}_h$, on obtient l'inégalité (2.42).

A partir des Lemmes 2.3, 2.4 et 2.5 on démontre les majorations générales de l'erreur suivantes.

Théorème 2.1 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations. On suppose que l'hypothèse H_2 est satisfaite et que h est suffisamment petit ; soit $u_h \in X'_h$ la solution du schéma 1. Alors, si la solution u du problème (1.1), (1.2) appartient à l'espace $C^1(\bar{\Omega})$, on a :

$$(2.46)\quad |u-u_h|_{h,1} + \langle |B|^{1/2}(u-u_h)\rangle_{h,1} \leq$$

$$\leq C \inf_{v_h \in X'_h} \left(|A(u-v_h)|_{h,1} + \langle |B|^{1/2}(u-v_h)\rangle_{h,1} \right),$$

où C est une constante >0 indépendante de h.

Démonstration : Pour tout $v_h \in X'_h$, on définit l'expression E'_h par

$$E'_h = \left(A(u_h - v_h), u_h - v_h\right)_{h,1} .$$

En utilisant le Lemme 2.3, on peut écrire :

$$E'_h \geq C\, |u_h - v_h|^2_{h,1} + \langle |B|^{1/2}(u_h - v_h)\rangle^2_{h,1}$$

D'autre part, on a d'après la définition du schéma 1

$$E'_h = \left(A(u-v_h), u_h - v_h\right)_{h,1} .$$

En utilisant l'inégalité de CAUCHY SCHWARZ, puis l'inégalité triangulaire, on déduit des deux dernières relations l'inégalité (2.46).

Pour montrer la majoration suivante, on a besoin du résultat technique suivant

Lemme 2.6 : Soit K un rectangle quelconque de $\mathcal{C}_h$. A toute fonction $p \in P_K^k$, on associe sa projection $\Pi_K^{k-1} p \in P_K^{k-1}$. On a alors :

$$(2.47)\quad p = \Pi_K^{k-1} p \quad \text{aux points} \quad q_{ij}^K \,,\ 1 \leq i,j \leq k \,,$$

où les points q_{ij}^K sont définis en (2.18).

Démonstration : D'après la définition de la projection sur l'espace P_K^{k-1}, on a :

$$\int_K p\, q\, dx dy = \int_K \left(\Pi_K^{k-1} p\right) q\, dx dy \,, \text{ pour tout } q \in P_K^{k-1}$$

Les fonctions pq et $\left(\Pi_K^{k-1} p\right) q$ sont respectivement des polynômes de Q_{2k-1} et Q_{2k-2}. On a donc :

$$(p,q)_{h,K,k} = \int_K pq\,dxdy = \int_K \left(\Pi_K^{k-1} p\right) q\,dxdy = \left(\left(\Pi_K^{k-1} p\right), q\right)_{h,K,k}$$

Les points g_{ij}^K , $1 \leq i,j \leq k$, définis en (2.18) forment un ensemble $\mathcal{Q}_{k-1}$-unisolvant. On en déduit l'égalité (2.47).

Soit l'espace $Y_h^{k-1} = \left\{ w \in L^2(\Omega) \; ; \; w|_K \in P_K^{k-1} \;, \forall K \in \mathcal{C}_h \right\}$.
On a :

Théorème 2.2 : On se place dans le cadre des hypothèses du Lemme 2.4 ; soit $u_h \in X_h^k$ la solution du schéma 2. Alors si la solution u du problème (1.1), (1.2) appartient à l'espace $H^1(\Omega)$, on a :

$$(2.48)\quad |u-u_h|_{h,k} + \langle |B|^{1/2}(u-u_h)\rangle_{h,k} \leq$$

$$\leq c \inf_{v_h \in X_h^k} \left(\sup_{w \in Y_h^{k-1}} \frac{\left|(A(u-v_h), w)_{L^2(\Omega)}\right|}{|w|_{L^2(\Omega)}} + |u-v_h|_{h,k} + \langle |B|^{1/2}(u-v_h)\rangle_{h,k} \right),$$

où C est une constante >0 indépendante de h .

Démonstration : Pour tout $v_h \in X_h^k$, on définit l'expression E_h par

$$E_h = \left(A(u_h - v_h), \Pi_{k-1}(u_h - v_h)\right)_{L^2(\Omega)} .$$

D'après le Lemme 2.4, on a :

$$E_h \geq c \left| \Pi_{k-1}(u_h - v_h) \right|^2_{L^2(\Omega)} + \left| |B|^{1/2} \Pi^{k-1}(u_h - v_h) \right|^2_{L^2(\partial\Omega)} .$$

D'autre part, la définition du schéma 2 entraîne que :

$$E_h = \left(A(u - v_h), \Pi_{k-1}(u_h - v_h)\right)_{L^2(\Omega)} .$$

Des deux dernières relations, on déduit l'inégalité :

$$(2.49)\quad \left| \Pi_{k-1}(u_h - v_h) \right|_{L^2(\Omega)} + \left| |B|^{1/2} \Pi^{k-1}(u_h - v_h) \right|_{L^2(\partial\Omega)} \leq$$

$$\leq c \sup_{w \in Y_h^{k-1}} \frac{\left|(A(u-v_h), w)_{L^2(\Omega)}\right|}{|w|_{L^2(\Omega)}} .$$

En utilisant le Lemme 2.6, il vient :

$$(2.50)\quad \left|\Pi_{k-1}(u_h - v_h)\right|_{L^2(\Omega)} = \left|\Pi_{k-1}(u_h - v_h)\right|_{h,k} = |u_h - v_h|_{h,k}$$

De même, on peut montrer que :

$$(2.51)\quad \left|\Pi^{k-1}(u_h - v_h)\right|_{L^2(\partial\Omega)} = \langle \Pi^{k-1}(u_h - v_h)\rangle_{h,k} = \langle u_h - v_h\rangle_{h,k} .$$

En combinant les trois dernières relations avec l'inégalité triangulaire, on obtient la majoration (2.48).

En raisonnant comme dans le Théorème 2.1, et en utilisant le Lemme 2.5 et la définition du schéma 3, on obtient le

Théorème 2.3 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de $\bar{\Omega}$ On suppose que les hypothèses H_1 et H_2 sont satisfaites, et que h est suffisamment petit ; soit $u_h \in X_h^k$ la solution du schéma 3. Alors, si la solution u du problème (1.1), (1.2) appartient à l'espace $C^1(\bar{\Omega})$, on a :

$$(2.52)\quad |u - u_h|_{h,k} + \langle |B|^{1/2}(u - u_h)\rangle_{h,k} \leq$$

$$\leq C \inf_{v_h \in X_h^k} \left(|A(u - v_h)|_{h,k} + \langle |B|^{1/2}(u - v_h)\rangle_{h,k} \right) .$$

où C est une constante > 0 indépendante de h.

Pour majorer les membres de droite des inégalités (2.46), (2.48) et (2.52), on construit d'abord des fonctions $r_h u \in X_h^k$ et $r'_h u \in X'_h$ qui interpolent la fonction u en certains points et on estime les expressions

$$|A(u - r_h u)|_{h,k}\ ,\ |A(u - r'_h u)|_{h,1}\ ,\ \sup_{w \in Y_h^{k-1}} \frac{|(A(u - r_h u), w)_{L^2(\Omega)}|}{|w|_{L^2(\Omega)}} .$$

Si l'interpolée $r_h u$ (resp. $r'_h u$) est définie comme au Chapitre 0, exemple (0.2) (resp. exemple (0.3)) et si on utilise brutalement le Lemme 0.11, on obtient les majorations :

$$(2.53)\quad |A(u - r_h u)|_{h,k} \leq C h^k |u|_{k+1,2,\Omega} ,$$

$$(2.54)\quad |A(u - r'_h u)|_{h,1} \leq C h |u|_{2,2,\Omega} ,$$

$$(2.55)\quad \sup_{w \in Y_h^{k-1}} \frac{|(A(u - r_h u), w)_{L^2(\Omega)}|}{|w|_{L^2(\Omega)}} \leq C h^k |u|_{k+1,2,\Omega} .$$

On va montrer que l'on peut obtenir en fait des majorations en $O(h^{k+1})$, $O(h^2)$ et $O(h^{k+1})$ respectivement.

Définition 2.2 : A toute fonction v définie et continue sur un élément K de $\mathcal{C}_h$, de sommets a_i, $1 \le i \le 4$ (figure 2.2), on associe sa fonction P'_K-interpolée $r'_K v$ de la façon suivante :

$$r'_K v = \hat{r}' \hat{v} \circ F_K^{-1} \quad , \quad \hat{v} = v \circ F_K \quad , \tag{2.56}$$

où la transformation F_K est définie en (2.9), et où $\hat{r}' \hat{v}$ est l'unique polynôme de P_1 satisfaisant (Chapitre 0, exemple (0.3))

$$\hat{r}' v(a_i) = \frac{1}{2} \left(\hat{v}(\hat{a}_{i-4}) + \hat{v}(\hat{a}_{i-3}) \right) \quad , \quad 5 \le i \le 7 \quad . \tag{2.57}$$

Soit v une fonction de $C^0(\bar{\Omega})$. Sa fonction X'_h-interpolée $r'_h v$ est l'unique élément de X'_h dont la restriction à chaque élément $K \in \mathcal{C}_h$ est égale à $r'_K v$.

Sur le segment $[-1, +1]$ on considère la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi \sim \sum_{i=1}^{k+1} \hat{\omega}_i^l \, f(l_i) \quad , \tag{2.58}$$

où les l_i, $1 \le i \le k+1$, $l_1 = -1$, $l_{k+1} = 1$, sont les abscisses de GAUSS LOBATTO [17] et les $\hat{\omega}_i^l$ sont les poids tels que la formule de quadrature (2.58) soit exacte pour les polynômes de P_{2k-1}. Soit $\hat{l}_{ij}$ le point du carré de référence de coordonnées (l_i, l_j), $1 \le i, j \le k+1$.

Définition 2.3 : A toute fonction $v \in C^0(K)$, on associe sa fonction P_K^k-interpolée $r_K v$ de la façon suivante :

$$r_K v = \hat{r} \hat{v} \circ F_K^{-1} \quad , \quad \hat{v} = v \circ F_K \quad , \tag{2.59}$$

où $\hat{r} \hat{v}$ est l'unique polynôme de Q_k égal à $\hat{v}$ aux points $\hat{l}_{ij}$, $1 \le i, j \le k+1$. Soit v une fonction de $C^0(\bar{\Omega})$; sa fonction X_h^k-interpolée $r_h v$ est l'unique fonction de X_h^k dont la restriction à chaque élément $K \in \mathcal{C}_h$ est égale à $r_K v$.

Lemme 2.7 : Soient $v \in H^3(\Omega)$ et $r'_h v \in X'_h$ son interpolée. On suppose que $(\mathcal{C}_h)$ est une famille régulière de triangulations. Alors pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on a :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}(v - r'_h v) \right|_{h,K,1} + \left| \frac{\partial}{\partial y}(v - r'_h v) \right|_{h,K,1} \le c \left(z_K |v|_{2,2,K} + h_K^2 |v|_{3,2,K} \right) , \tag{2.60}$$

où C est une constante > 0 indépendante de h.

Démonstration : Soit K un élément de $\mathcal{C}_h$. On a :

$$(2.61)\quad \text{aire}\,K\left(\frac{\partial}{\partial x}(v-r_h'v)\right)(G_K) = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v}-\hat{\pi}'\hat{v}) - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}(\hat{v}-\hat{\pi}'\hat{v})\right)(0,0)\ .$$

L'application linéaire $\hat{v} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v}-\hat{\pi}'\hat{v})$ est continue de $H^3(\hat{K})$ dans $\mathbb{R}$ et est identiquement nulle pour tout $\hat{v} \in P_2$

D'après le Lemme 0.3, on en déduit que :

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v}-\hat{\pi}'\hat{v})(0,0)\right| \leq c\,|\hat{v}|_{3,2,\hat{K}}\ .$$

En utilisant le Lemme 0.9, inégalité (0.75), il vient :

$$(2.62)\quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v}-\hat{\pi}'\hat{v})(0,0)\right| \leq c \inf_{-1\leq \xi,\eta\leq +1}\left(J_K(\xi,\eta)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(h_K z_K |v|_{2,2,K} + h_K^3 |v|_{3,2,K}\right)\ .$$

L'inégalité précédente est aussi valable lorsqu'on remplace $\frac{\partial}{\partial \xi}$ par $\frac{\partial}{\partial \eta}$.
D'autre part, on peut montrer que :

$$(2.63)\quad \left|\frac{\partial y}{\partial \eta}(0,0)\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial \xi}(0,0)\right| \leq c\,h_K\ .$$

En combinant les relations (2.61), (2.62) et (2.63), on a :

$$(2.64)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}(v-r_h'v)\right|_{h,K,1} \leq c\left(z_K|v|_{2,2,K} + h_K^2|v|_{3,2,K}\right)\ .$$

L'inégalité précédente est aussi valable avec $\frac{\partial}{\partial x}$ remplacé par $\frac{\partial}{\partial y}$, d'où l'on déduit l'inégalité (2.60).

Lorsque les éléments $K \in \mathcal{C}_h$ sont des rectangles, on a :

Lemme 2.8 : Soit v une fonction quelconque de $H^{k+2}(\Omega)$, où k est un entier ≥ 1 , et soit $r_h v$ sa fonction X_h^k-interpolée. On suppose que les hypothèses du Lemme 2.4 sont satisfaites. Alors pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on a :

$$(2.65)\quad \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(v-r_h v), w\right)_{L^2(K)}\right| + \left|\left(\frac{\partial}{\partial y}(v-r_h v), w\right)_{L^2(K)}\right| \leq$$
$$\leq c\,h_K^{k+1}\,|v|_{k+2,2,K}\,|w|_{L^2(K)}\ ,$$

pour tout $w \in P_K^{k-1}$, où C est une constante >0 indépendante de h .

Démonstration : Soit K un rectangle de $\mathcal{C}_h$, on a :

$$(2.66)\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}(v-r_h v), w\right)_{L^2(K)} = \frac{\partial y}{\partial \eta}\int_{\hat{K}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v}-\hat{\pi}\hat{v})\right)\hat{w}\,d\xi\,d\eta\ .$$

L'application linéaire $\hat{v} \longrightarrow \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})\right)\hat{w}\, d\xi d\eta$ est continue de $H^{k+2}(\hat{K})$ dans $\mathbb{R}$ de norme $\leq \hat{c}\, \|\hat{v}\|_{k+2,2,\hat{K}} |\hat{w}|_{L^2(\hat{K})}$, et elle est identiquement nulle pour tout $\hat{v} \in Q_k \cup P_{k+1}$. En effet, si $\hat{v} \in Q_k$, on a $\hat{r}\hat{v} = \hat{v}$; si on a $\hat{v} = \eta^{k+1}$, alors $\hat{r}\hat{v}$ ne dépend que de η ; enfin si $\hat{v} = \xi^{k+1}$, alors $\hat{v} - \hat{r}\hat{v}$ est polynôme de degré $k+1$ en ξ qui s'annule aux abscisses de GAUSS-LOBATTO, soit :

$$\hat{v} - \hat{r}\hat{v} = (\xi - \ell_1)(\xi - \ell_2) \cdots\cdots (\xi - \ell_{k+1}) .$$

La dérivée lère en ξ de ce polynôme est un polynôme de degré k qui s'annule aux abscisses de GAUSS LEGENDRE ([17]) :

$$(2.67) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v}) = (k+1)(\xi - g_1) \cdots\cdots (\xi - g_k) .$$

Puisque $\hat{w}$ est un polynôme de Q_{k-1}, l'intégrale $\int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})\right)\hat{w}\, d\xi d\eta$ est calculée de façon exacte en utilisant la formule de quadrature (2.17) ; la relation (2.67) entraîne que cette intégrale est nulle.

Appliquant le Lemme 0.5, il vient :

$$\left| \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})\right)\hat{w}\, d\xi d\eta \right| \leq \hat{c}\, |\hat{v}|_{k+2,2,\hat{K}} |\hat{w}|_{L^2(\hat{K})}$$

L'élément K étant un rectangle, on a d'après le Lemme 0.8 :

$$|\hat{v}|_{k+2,2,\hat{K}} \leq c (J_K)^{-\frac{1}{2}} h_K^{k+2} |v|_{k+2,2,K} ,$$

$$|\hat{w}|_{L^2(\hat{K})} \leq c (J_K)^{-\frac{1}{2}} |w|_{L^2(K)} .$$

D'autre part, on a :

$$\left|\frac{\partial y}{\partial \eta}\right| \leq c\, h_K , \quad (J_K)^{-1} \leq c\, h_K^{-2} .$$

En combinant la relation (2.66) avec les cinq dernières inégalités, on obtient la majoration :

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x}(v - r_k v), w\right)_{L^2(K)} \right| \leq c\, h_K^{k+1} |v|_{k+2,2,K} |w|_{L^2(K)} .$$

Cette inégalité est aussi valable lorsque $\frac{\partial}{\partial x}$ est remplacé par $\frac{\partial}{\partial y}$, d'où l'on déduit l'inégalité (2.65).

Lemme 2.9 : Soit v une fonction quelconque de $H^{k+2}(\Omega)$, pour un entier $k \geq 1$ et soit $r_h v$ sa fonction X_h^k-interpolée, définie en (2.59). On suppose que $(\mathcal{C}_h)$ est une famille régulière de triangulations. Alors pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on a :

$$(2.68)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}(v - r_h v)\right|_{h,K} + \left|\frac{\partial}{\partial y}(v - r_h v)\right|_{h,K} \leq C\, \sigma_K \cdot h_K^{k-1} |v|_{k+1,2,K} + C\, h_K^{k+1} |v|_{k+2,2,K}$$

où C est une constante > 0 indépendante de h, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$.

Démonstration : Soit K un quadrilatère quelconque de $\mathcal{C}_h$. On a :

$$(2.69)\quad J_K(\hat{q}_{ij})\left(\frac{\partial}{\partial x}(v - r_h v)\right)(q_{ij}^K) = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v}) - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})\right)(\hat{q}_{ij}),$$

pour $1 \leq i, j \leq k$.

L'application linéaire $\hat{v} \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})\right)(\hat{q}_{ij})$ est continue de $H^{k+2}(R)$ dans R et est identiquement nulle pour tout $\hat{v} \in Q_k \cup P_{k+1}$.

En effet, comme dans la démonstration du Lemme 2.8, on a :

$$\hat{v} - \hat{r}\hat{v} = 0 \quad \text{pour tout} \quad \hat{v} \in Q_k,$$

et $\hat{r}\hat{v}$ ne dépend que de la variable η si $\hat{v} = \eta^{k+1}$.

Si $\hat{v} = \xi^{k+1}$, alors l'égalité (2.67) est valable, ce qui entraîne que :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})\right)(\hat{q}_{ij}) = 0$$

Appliquant le Lemme 0.5, il vient :

$$(2.70)\quad \left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})\right)(\hat{q}_{ij})\right| \leq \hat{C}\left([\hat{v}]_{k+2,2,\hat{K}} + \left[\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta}\right]_{k,2,\hat{K}}\right),$$

On a une inégalité analogue pour le terme $\frac{\partial}{\partial \eta}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})$. D'autre part, d'après le Lemme 0.9, on a :

$$(2.71)\quad [\hat{v}]_{k+2,2,\hat{K}} \leq C \inf_{-1 \leq \xi, \eta \leq +1} \left(J_K(\xi, \eta)\right)^{-\frac{1}{2}} h_K^{k+2} |v|_{k+2,2,K},$$

$$(2.72)\quad \left[\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta}\right]_{k,2,\hat{K}} \leq C \inf_{-1 \leq \xi, \eta \leq +1} \left(J_K(\xi, \eta)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(h_K^k\, \sigma_K |v|_{k+1,2,K} + h_K^{k+2} |v|_{k+2,2,K}\right)$$

Enfin, le Lemme 0.7 permet d'écrire :

$$(2.73)\quad \frac{\sup J_K(\xi, \eta)}{\inf J_K(\xi, \eta)} \leq C.$$

En combinant les relations (2.69) à (2.73), pour les différentes valeurs de i et j , $1 \leq i,j \leq k$, on obtient l'inégalité (2.68) pour le terme $\left|\frac{\partial}{\partial x}(v - r_h v)\right|_{h,K,k}$. La démonstration est identique pour majorer le terme $\left|\frac{\partial}{\partial y}(v - r_h v)\right|_{h,K,k}$.

A partir des Lemmes 2.6 à 2.8 et des Théorèmes 2.1 à 2.3 on démontre les majorations d'erreur suivantes :

Théorème 2.4 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations. On suppose que les hypothèses H_1 et H_2 sont satisfaites et que est suffisamment petit ; soit $u_h \in X'_h$ la solution du schéma 1. Alors si la solution u du problème (1.1), (1.2) appartient à $H^3(\Omega)$, on a :

$$(2.74)\quad |u - u_h|_{h,1} + \langle |B|^{1/2}(u - u_h)\rangle_{h,1} \leq C h^2 \|u\|_{H^3(\Omega)} ,$$

où C est une constante > 0 indépendante de h .

Démonstration : En raisonnant comme dans le Lemme (0.11), on a :

$$|u - r'_h u|_{h,K,1} \leq C h_K^2 |u|_{2,2,K} ,$$

En sommant sur tous les éléments K de $\mathcal{C}_h$, on obtient :

$$(2.75)\quad |u - r'_h u|_{h,1} \leq C h^2 |u|_{2,2,\Omega} .$$

Soit S un côté quelconque d'un élément $K \in \mathcal{C}_h$, d'extrémités A_i et A_j et de milieu A_{ij} . D'après la définition 2.2, on a :

$$\langle u - r'_h u\rangle_{h,S,1} = \left|\overrightarrow{A_i A_j}\right| \left| u(A_{ij}) - \tfrac{1}{2}(u(A_i) + u(A_j))\right|$$

On en déduit, en raisonnant comme dans le Lemme 0.11 :

$$\langle u - r'_h u\rangle_{h,S,1} \leq C h_K^2 |u|_{2,2,S} .$$

En sommant sur toutes les faces S incluses dans $\partial\Omega$ et en utilisant le Lemme 0.6, on a :

$$(2.76)\quad \langle u - r'_h u\rangle_{h,1} \leq C h^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \sum_{S \subset (\partial\Omega \cap \partial K)} |u|^2_{2,2,S}\right)^{1/2} \leq C h^2 \|u\|_{3,2,\Omega} .$$

En combinant les inégalités (2.75) et (2.76) avec le Lemme 2.7 et le Théorème 2.1,

on obtient la majoration :

$$|u-u_h|_{h,1} + \langle |B|^{1/2}(u-u_h)\rangle_{h,1} \leq c\left(z|u|_{2,2,\Omega} + h^2|u|_{3,2,\Omega}\right) ,$$

où $z = \max\{ z_K \; ; \; K \in \mathcal{C}_h \}$

En utilisant l'hypothèse H_1, on en déduit l'inégalité (2.74).

Théorème 2.5 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations du rectangle Ω en rectangles K ; soit $u_h \in X_h^k$ la solution du schéma 2. Alors si la solution u du problème (1.1), (1.2) appartient à $H^{k+2}(\Omega)$, on a :

$$(2.77) \quad |u-u_h|_{h,k} + \langle |B|^{1/2}(u-u_h)\rangle_{h,k} \leq c\, h^{k+1} \|u\|_{k+2,2,\Omega} ,$$

où C est une constante > 0 indépendante de h.

Démonstration : D'après le Lemme 0.11, on a :

$$|u - r_h u|_{L^2(K)} \leq c\, h_K^{k+1} |u|_{k+1,2,K} .$$

D'autre part, on peut montrer que :

$$|u-r_h u|_{h,K,k} \leq c\, h_K^{k+1} |u|_{k+1,2,K} ,$$

$$\langle u - r_h u\rangle_{h,S,k} \leq c\, h_K^{k+1} |u|_{k+1,2,} .$$

En sommant sur tous les éléments K de $\mathcal{C}_h$ et en utilisant le Lemme 0.6, on obtient :

$$|u-r_h u|_{L^2(\Omega)} \leq c\, h^{k+1} |u|_{k+1,2,\Omega} ,$$

$$(2.78) \quad |u - r_h u|_{h,k} \leq c\, h^{k+1} |u|_{k+1,2,\Omega} ,$$

$$(2.79) \quad \langle u - r_h u\rangle_{h,k} \leq c\, h^{k+1} \|u\|_{k+2,2,\Omega} .$$

En combinant les trois dernières inégalités avec le Lemme 2.8 et le Théorème 2.2, on obtient la majoration (2.77).

Théorème 2.6 : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations en quadrilatères quelconques K. On suppose que les hypothèses H_1 et H_2 sont satisfaites et que h est suffisamment petit ; soit $u_h \in X_h^k$ la solution du schéma 3. Alors la solution u du problème (1.1), (1.2) appartient à $H^{k+2}(\Omega)$, on a :

$$(2.80) \quad |u-u_h|_{h,k} + \langle |B|^{1/2}(u-u_h)\rangle_{h,k} \leq c\, h^{k+1} \|u\|_{k+2,2,\Omega} ,$$

où C est une constante > 0 indépendante de h.

Démonstration : En utilisant le Théorème 2.3, le Lemme 2.9 et les inégalités (2.78) et (2.79), on obtient :

$$|u-u_h|_{h,k} + \langle |B|^{1/2}(u-u_h)\rangle_{h,k} \leq c\left(z\, h^{k-1}|u|_{k+1,2,\Omega} + h^{k+1}|u|_{k+1,2,\Omega}\right),$$

où $z = \max\left\{z_K\ ;\ K \in \mathcal{C}_h\right\}$

L'inégalité précédente et l'hypothèse H_1 entraînent la majoration (2.80).

III.3 - Méthodes d'éléments finis discontinues

Dans ce paragraphe, on définit les méthodes discontinues, comme dans [27], [31] et [42]. On considère particulièrement le cas où les éléments finis sont des quadrilatères convexes (pour le cas des éléments triangulaires, on renvoie à [31]. Lorsque l'espace P_K des fonctions de forme est construit à partir des polynômes de Q_k, on démontre dans [31] que l'erreur est en $O(h^k)$ lorsque les quadrilatères sont quelconques, et est en $O(h^{k+1})$, lorsque les quadrilatères sont des rectangles. L'utilisation d'un lemme de "BRAMBLE et HILBERT approché" (Lemme 0.5) permet d'établir le lien entre ces deux résultats, et on démontre que, dans le cas des quadrilatères quelconques, l'erreur est en $O(h^{k-1}z + h^{k+1})$, où $z = \max(z_K \; ; \; z_K \in \mathcal{C}_h)$, z_K étant la distance entre les milieux des diagonales de l'élément K (relation 0.66).

On suppose l'ouvert Ω polyédrique ; soit $\mathcal{C}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ en éléments finis K et soit P_K un espace de dimension finie défini sur K, pour $K \in \mathcal{C}_h$.

Définition 3.1 : Méthodes discontinues. On cherche $u_h \in W_h = \prod_{K \in \mathcal{C}_h} P_K$ tel que, pour tout $v_h \in W_h$

$$(3.1) \qquad \int_K (Au_h - f) v_h \, dx\,dy - \int_{\partial_- K} (\mu n_x + \nu n_y)(u_h - t_h) v_h \, ds = 0 \quad ,$$

où

$$(3.2) \qquad t_h = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial_- K \cap \partial_- \Omega \\ \text{trace extérieure de } u_h \text{ sur } \partial_- K - (\partial_- K \cap \partial_- \Omega) \, . \end{cases}$$

On rappelle (voir Chapitre I paragraphe 4) que si S désigne une face d'un élément K non incluse dans $\partial\Omega$, la trace extérieure sur S d'une fonction $v_h \in W_h$ est la valeur de v_h le long de S, à l'extérieur de K.

Remarque 3.1 : La méthode discontinue définie ci-dessus est un cas particulier des méthodes décrites au Chapitre I, paragraphe 4. En effet, le Lemme 1.2 implique que l'hypothèse (I.4.18) est satisfaite. Une conséquence du Lemme I.4.2 est alors que la méthode discontinue, exposée au Chapitre I dans le cas des systèmes de FRIEDRICHS, se réduit, dans le cas du problème (1.1), (1.2) à la méthode décrite ci-dessus.

Théorème 3.1 [31] : On suppose que $f \in L^2(\Omega)$. Alors le problème (3.1), (3.2) a une solution unique $u_R \in W_R$.

Démonstration : La méthode d'éléments finis (3.1), (3.2) est équivalente à un système linéaire dont le nombre d'équations est égal à la dimension de W_R Il est donc suffisant de montrer l'unicité de la solution u_R . On suppose donc que $f=0$ et on va montrer que nécessairement on a $u_R = 0$. Soit $K_1, K_2, \dots, K_N$ une numérotation des éléments $K \in \mathcal{B}_R$ satisfaisant les conditions du Lemme 1.2. Si $u_R=0$ sur $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{i-1}$, alors $t_R=0$ sur $\partial_- K_i$ et l'équation (3.1) devient pour l'élément K_i :

$$-\int_{\partial K_i} (Bu_R) v_R \, ds + \int_{K_i} (Au_R) v_R \, dx\,dy = 0 \qquad \text{, pour tout } v_R \in P_{K_i}$$

Choisissant $v_R = u_R$ et appliquant la formule de GREEN

$$(3.3) \qquad \int_{K_i} \left(\mu \frac{\partial u_R}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_R}{\partial y} \right) u_R \, dx\,dy = \frac{1}{2} \int_{\partial K_i} (\mu n_x + \nu n_y) u_R^2 \, ds \quad ,$$

on obtient :

$$(3.4) \qquad \int_{\partial_+ K_i} B u_R^2 \, ds - \int_{\partial_- K_i} B u_R^2 \, ds + \int_{K_i} \sigma u_R^2 \, dx\,dy = 0 \quad .$$

D'après la définition de $\partial_+ K_i$ (resp. $\partial_- K_i$), on a l'inégalité $B > 0$ sur $\partial_+ K_i$ (resp. $B < 0$ sur $\partial_- K_i$). D'autre part, on a $\sigma \geq \alpha > 0$ (Remarque 1.5). On en déduit que u_R est nulle sur K_i . En raisonnant par récurrence, on montre que u_R est nulle sur Ω .

Lemme 3.1 : On suppose que l'inclusion $P_0 \subset P_K$ est satisfaite pour tout $K \in \mathcal{B}_R$. Alors la propriété de conservation des neutrons est satisfaite au sens suivant : soit $u_R \in W_R$ la solution du problème (3.1), alors on a :

$$(3.5) \qquad \int_{\partial_+ \Omega} (\mu n_x + \nu n_y) u_R \, ds + \int_{\Omega} \sigma u_R \, dx\,dy = \int_{\Omega} f \, dx\,dy \quad .$$

Démonstration : Puisque l'inclusion $P_0 \subset P_K$ est satisfaite, on peut remplacer v_R par 1 dans l'égalité 3.1 ; il vient :

$$\int_K Au_R \, dx\,dy - \int_{\partial_- K} (\mu n_x + \nu n_y)(u_R - t_R) \, ds = \int_K f \, dx\,dy \quad .$$

On en déduit que :

$$(3.6) \qquad \int_{\partial_+ K} Bu_R \, ds + \int_{\partial_- K} Bt_R \, ds + \int_K \sigma u_R \, dx\,dy = \int_K f \, dx\,dy \quad .$$

Cette relation exprime la conservation des neutrons élément par élément. En sommant les relations telles que (3.6) pour tous les éléments $K \in \mathcal{C}_h$ et en utilisant l'égalité :

$$u_h = 0 \quad \text{sur } \partial_- \Omega \quad ,$$

on obtient l'égalité (3.5)

On montre maintenant une majoration générale de l'erreur $u - u_h$.

Lemme 3.2 [31] : Pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, tout $v_h \in P_K$ et pour toute fonction $q \in L_2(\partial_- K)$, on a la relation :

$$\frac{1}{2}\int_{\partial_+ K} B(u_h - v_h)^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\partial_- K} B(t_h - q)^2 ds -$$

$$(3.7) \qquad -\frac{1}{2}\int_{\partial_- K} B\big((u_h - v_h) - (t_h - t)\big)^2 ds + \int_K \sigma (u_h - v)^2 dx dy =$$

$$= \int_{\partial_+ K} B(u - v)(u_h - v_h) ds + \int_{\partial_- K} B(u - q)(u_h - v_h) ds + \int_K (u - v_h) A^*(u_h - v_h) dx dy .$$

où A^* est l'adjoint formel de l'opérateur A , c'est-à-dire

$$A^* = -\mu \frac{\partial}{\partial x} - \nu \frac{\partial}{\partial y} + \sigma$$

Démonstration : Soient $v_h \in P_K$ et $q \in L^2(\partial_- K)$. On pose :

$$(3.8) \qquad w = u_h - v_h \in P_K \quad , \quad \zeta = t_h - q \quad .$$

On considère l'expression :

$$Y_h = -\int_{\partial_- K} B(w - \zeta) w \, ds + \int_K (Aw) w \, dx dy .$$

En utilisant la formule de GREEN, il vient :

$$Y_h = \frac{1}{2}\int_{\partial K} B w^2 ds - \int_{\partial_- K} B(w - \zeta) w \, ds + \int_K \sigma w^2 dx dy \quad .$$

Puisque :

$$(w - \zeta) w = \frac{1}{2}\left(w^2 - \zeta^2 + (w - \zeta)^2 \right)$$

On obtient :

$$(3.9) \qquad Y_h = \frac{1}{2}\int_{\partial_+ K} B w^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\partial_- K} B \zeta^2 ds - \frac{1}{2}\int_{\partial_- K} B (w - \zeta)^2 ds +$$

$$+ \int_K \sigma w^2 dx dy \quad .$$

D'autre part, en utilisant l'égalité (3.1), on a :

$$Y_h = \int_{\partial_- K} B(v_h - q)\, w\, ds + \int_K A(u - v_h)\, w\, dx\, dy \quad .$$

On a la formule de GREEN suivante (Lemme I.1.2) :

$$\int_K A(u - v_h)\, w\, dx\, dy = \int_K (u - v_h)\, A^* w\, dx\, dy + \int_{\partial K} B(u - v)\, w\, ds \quad .$$

On en déduit que :

$$(3.10)\quad Y_h = \int_{\partial_+ K} B(u - v_h)\, w\, ds + \int_{\partial K} B(u - q)\, w\, ds + \int_K (u - v_h)\, A^* w\, dx\, dy \quad .$$

En combinant les relations (3.8), (3.9) et (3.10), on obtient la majoration (3.7).

Pour obtenir des majorations d'erreur plus explicites, il faut définir plus précisément les espaces de dimension finie P_K . Soit K un quadrilatère convexe quelconque de $\mathcal{C}_h$ et soit $F_K \in (Q_1)^2$ la transformation (définie en (2.9)) qui envoie le carré de référence $\hat{K} = [-1, +1]^2$ sur la quadrilatère K .
Sur chaque quadrilatère K , on choisit, comme en (2.11) :

$$(3.11)\quad P_K = P_K^k = \{ p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \quad ; \quad \forall \hat{p} \in Q_k \} \quad .$$

On considère d'abord le cas des quadrilatères quelconques, dans le cas général. Sur l'élément de référence $\hat{K}$, on définit l'opérateur $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}\{L^2(\hat{K}) ; Q_k\}$ qui à tout $\hat{v} \in L^2(\hat{K})$ associe $\hat{\Pi}\hat{v} \in Q_k$ par :

$$(3.12)\quad \int_{\hat{K}} (\hat{\Pi}\hat{v})\, \hat{w}\, d\xi\, d\eta = \int_{\hat{K}} \hat{v}\, \hat{w}\, d\xi\, d\eta \quad , \text{ pour tout } \hat{w} \in Q_k \quad .$$

Pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on définit $\Pi_K^k \in \mathcal{L}\{L^2(K) ; P_K^k\}$ par :

$$(3.13)\quad \widehat{\Pi_K^k v} = \hat{\Pi}\hat{v} \qquad \text{pour tout } v \in L^2(K) \quad ,$$

où $\hat{v} = v \circ F_K$ (On peut remarquer que lorsque l'élément K est un rectangle, on retrouve exactement l'opérateur de projection défini en (2.37).)
Ensuite, pour tout $v \in L^2(\Omega)$, on définit $\Pi_h v$ comme l'unique fonction de W_h dont la restriction à chaque $K \in \mathcal{C}_h$ est égale à $\Pi_K^k v$.

Soit $K_1, K_2, \ldots, K_I$ une numérotation donnée des éléments K de $\mathcal{C}_h$ satisfaisant les conditions du Lemme 1.2. Pour tout $i = 1, \ldots, I$, on pose :

$$\Omega_i = K_1 \cup \ldots \cup K_i$$

et on définit $\partial_- \Omega_i$ et $\partial_+ \Omega_i$ comme en (1.11) et (1.13).

Théorème 3.2 [31] : Soit $(\mathcal{C}_h)$ une famille régulière de triangulations de Ω en éléments quadrilatéraux K. On suppose que la solution u du problème (1.1), (1.2) appartient à $H^{k+2}(\Omega)$. Alors on a pour tout $i = 1, \ldots, I$:

$$(3.14) \quad |u - u_h|_{L^2(\Omega_i)} \leq C h^k \|u\|_{k+1,2,\Omega_i}$$

$$(3.15) \quad \left(\int_{\partial_+\Omega_i} B(u-u_h)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq C h^k \|u\|_{k+1,2,\Omega_i}$$

$$(3.16) \quad \left(\sum_{j=1}^{i} \int_{\partial_- K_j} B(u_h - t_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C h^k \|u\|_{k+1,2,\Omega_i}$$

où C est une constante > 0 indépendante de h

Démonstration : Pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on pose :

$$(3.17) \quad q_h = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial_- K \cap \partial_- \Omega \\ \text{trace extérieure de } \Pi_h u & \text{sur } \partial_- K - (\partial_- K \cap \partial_- \Omega) \end{cases}$$

Dans l'égalité (3.7), on remplace v_h par $\Pi_h u$, q par q_h et on estime les termes du membre de droite correspondant. En raisonnant comme dans [6], on a le résultat suivant, analogue à ceux du Lemme 0.11 :

$$(3.18) \quad \|u - \Pi_h u\|_{0,2,K} \leq C h_K^{k+1} \|u\|_{k+1,2,K}$$

$$(3.19) \quad \|u - \Pi_h u\|_{0,2,S} \leq C h_K^{k+1/2} \|u\|_{k+1,2,K}$$

où S est une face quelconque de K

D'après le Lemme 0.10 on a :

$$\|u_h - \Pi_h u\|_{1,2,K} \leq C h_K^{-1} \|u_h - \Pi_h u\|_{0,2,K}$$

$$\|u_h - \Pi_h u\|_{0,2,S} \leq C h_K^{-1/2} \|u_h - \Pi_h u\|_{0,2,K}$$

soit S est une face quelconque de K

De ces quatre inégalités, on déduit que :

$$\int_K (u - \Pi_R u) A^*(u_R - \Pi_R u)\,dx\,dy \le c\|u - \Pi_R u\|_{0,2,K} \|u_R - \Pi_R u\|_{1,2,K}$$

$$\le c\, h_K^k \|u\|_{k+1,2,K} \|u_R - \Pi_R u\|_{0,2,K} \quad ,$$

$$\int_{\partial_+ K} B(u - \Pi_R u)(u_R - \Pi_R u)\,ds \le c\, h_K^k \|u\|_{k+1,2,K} \|u_R - \Pi_R u\|_{0,2,K} \quad ,$$

$$\int_{\partial_- K} B(u - q_R)(u_R - \Pi_R u)\,ds \le c\, h_{\mathcal{D}_K}^k \|u\|_{k+1,2,\mathcal{D}_K} \|u_R - \Pi_R u\|_{0,2,K} \quad ,$$

où $\mathcal{D}_K$ est l'union des éléments de $\mathcal{C}_R$ qui ont un côté inclus dans $\partial_- K$ et où

$$h_{\mathcal{D}_K} = \max \{ h_K \; ; \; K \subset \mathcal{D}_K \} \quad .$$

La relation (3.7) combinée avec ces trois dernières inégalités devient :

$$(3.20) \quad \frac{1}{2}\int_{\partial_+ K} B(u_R - \Pi_R u)^2\,ds - \frac{1}{2}\int_{\partial_- K} B\big((u_R - \Pi_R u) - (t_R - q_R)\big)^2\,ds + \alpha\|u_R - \Pi_R u\|_{0,2,K}^2 \le$$

$$\le -\frac{1}{2}\int_{\partial_- K} B(t_R - q_R)^2\,ds + c\, h^k \|u\|_{k+1,2,\mathcal{D}_K} \|u_R - \Pi_R u\|_{0,2,K} \, .$$

En sommant sur tous les éléments $K \subset \Omega_i$, et en utilisant (3.2) et (3.17), il vient :

$$(3.21) \quad \frac{1}{2}\int_{\partial_+ \Omega_i} B(u_R - \Pi_R u)^2\,ds - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i} \int_{\partial_- K_j} B\big((u_R - \Pi_R u) - (t_R - q_R)\big)^2\,ds +$$

$$+ \alpha\|u_R - \Pi_R u\|_{0,2,\Omega_i} \le c\, h^k \|u\|_{k+1,2,\Omega_i} \|u_R - \Pi_R u\|_{0,2,\Omega_i} \, .$$

Des inégalités (3.18) et (3.21), on déduit :

$$\|u - u_R\|_{0,2,\Omega_i} \le \|u - \Pi_R u\|_{0,2,\Omega_i} + \|u_R - \Pi_R u\|_{0,2,\Omega_i} \le c R^{k+1} \|u\|_{k+1,2,\Omega_i} \quad ,$$

c'est-à-dire l'inégalité (3.14).

De la relation (3.21), on tire :

$$\Big(\int_{\partial_+ \Omega_i} B(u_R - \Pi_R u)^2\,ds\Big)^{1/2} \le c\, h^k \|u\|_{k+1,2,\Omega_i} \quad ,$$

et d'après l'inégalité (3.19), on a :

$$\Big(\int_{\partial_+ \Omega_i} B(u - \Pi_R u)^2\,ds\Big)^{1/2} \le c\, h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1,2,\Omega_i} \, .$$

Ces deux dernières relations entraînent l'inégalité (3.15).

Enfin, on peut écrire :

$$u_h - t_h = \left(u_h - \Pi_h u - (t_h - q_h)\right) + (\Pi_h u - u) + (u - q_h) \quad .$$

L'inégalité (3.21) implique que :

$$\left(\sum_{j=1}^{i} \int_{\partial K_j} B\left((u_h - \Pi_h u) - (t_h - q_h)\right)^2 ds \right)^{1/2} \leq c\, h^k \|u\|_{k+1,2,\Omega_i} \quad .$$

Les deux dernières relations et l'inégalité (3.19) entraînent la majoration (3.16).

Remarque 3.2 : La majoration (3.16) montre que lorsque la solution u du problème (1.1), (1.2) est assez régulière (c'est-à-dire appartient à $H^{k+1}(\Omega)$ pour un entier $k \geqslant 1$), les sauts $u_h - t_h$ de la solution approchée le long des côtés des éléments K tendent vers zéro lorsque h tend vers zéro.
Dans [31], on montre que lorsque les éléments $K \in \mathcal{C}_h$ sont des rectangles, on a la majoration :

$$(3.22) \qquad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = O(h^{k+1}) \quad .$$

On va montrer maintenant que cette majoration est en fait valable dès que les hypothèses (2.8) (i.e. chaque quadrilatère $K \in \mathcal{C}_h$ a deux faces éclairées) et (2.30) (i.e. pour tout élément $K \in \mathcal{C}_h$, on a l'inégalité $z_K \leq c\, h_K^2$

Sur l'intervalle $[-1, +1]$, on considère la formule de quadrature

$$(3.23 \qquad \int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi \sim \sum_{i=1}^{k+1} \hat{\omega}_i^r\, f(r_i) \quad ,$$

où les r_i , $1 \leq i \leq k+1$, $r_{k+1} = 1$ sont les abscisses de GAUSS RADAU ([17], [39]) et les $\hat{\omega}_i^r$ sont les poids tels que la formule de quadrature (3.23) soit exacte pour les polynômes de P_{2k} . Sur le carré de référence $\hat{K} = [-1, +1]^2$, on considère les points $\hat{r}_{ij}$. de coordonnées (r_i, r_j) , $1 \leq i, j \leq k+1$.

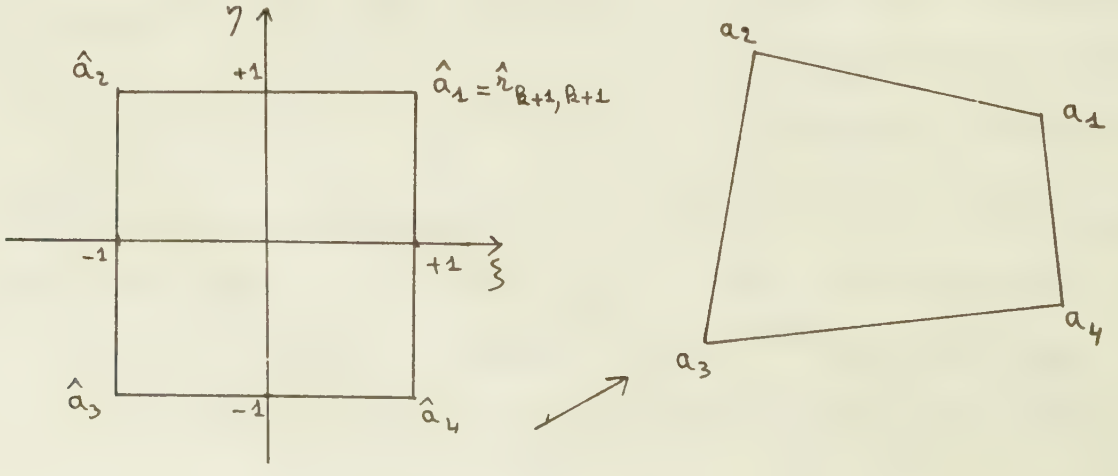


Figure 3.1

On va supposer que les deux faces éclairées du quadrilatère K de sommets a_1, a_2, a_3 et a_4 sont les côtés a_2a_3 et a_3a_4. Etant donné une fonction $\hat{v} \in C^0(\hat{K})$, on définit $\hat{R}\hat{v}$ comme l'unique polynôme de Q_k qui interpole $\hat{v}$ aux points $\hat{r}_{ij}$. Ensuite, pour tout $v \in C^0(K)$, on définit $R_K v \in P_K^k$

$$\widehat{R_K v} = \hat{R}\hat{v} \quad , \quad \text{où} \quad \hat{v} = v \circ F \tag{3.24}$$

Enfin, pour tout $v \in C^0(\bar{\Omega})$, on définit $R_k v \in W_k$ comme l'unique fonction de W_k telle que :

$$R_k v\big|_K = R_K v \quad , \quad \text{pour tout} \quad K \in \mathcal{C}_k \ . \tag{3.25}$$

En raisonnant comme dans [6], on peut montrer le résultat suivant, analogue au Lemme 0.11 :

Lemme 3.3 : Soit $(\mathcal{C}_k)$ une famille régulière de triangulations de Ω. On a :

$$\|v - R_K v\|_{0,2,K} \leq C h_K^{k+1} |v|_{k+1,2,K} \quad \text{pour tout } v \in H^{k+1}(K), \tag{3.26}$$

$$\|v - R_K v\|_{0,2,S} \leq C h_K^{k+3/2} |v|_{k+1,\infty,K} \quad \text{pour tout } v \in W^{k+1,\infty}(K), \tag{3.27}$$

pour toute face S incluse dans $\partial_+ K$.
Pour tout $v \in C^0(\bar{\Omega})$, on définit la semi norme $|v|_{k,\infty}$ par :

$$|v|_{k,\infty} = \max_{K \in \mathcal{C}_k} \left(\max \left\{ |v(r_{i,k+2}^K)|, |v(r_{k+2,j}^K)|, 1 \leq i,j \leq k+2 \right\} \right), \tag{3.28}$$

où $r_{ij}^K = F_K(\hat{r}_{ij})$, $1 \leq i,j \leq k+1$, pour tout $K \in \mathcal{C}_k$

on peut alors montrer le

Théorème 3.3 : Soit $(\mathcal{C}_k)$ une famille régulière de triangulations de Ω en éléments quadrilatéraux. On suppose que l'hypothèse (2.8) est satisfaite, et que P_K est choisi comme en (3.11), pour tout $K \in \mathcal{C}_k$. On suppose d'autre part que la solution u du problème (1.1), (1.2) appartient à $H^{k+2}(\Omega) \cap W^{k+1,\infty}(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de k telle que pour tout $i = 1, \ldots, I$, on ait :

$$(3.29)\quad \|u-u_h\|_{0,2,\Omega_i} \le C\left(2h^{k-1}\|u\|_{k+1,2,\Omega_i} + h^{k+1}\|u\|_{k+2,2,\Omega_i}\right),$$

$$(3.30)\quad \left(\int_{\partial_+\Omega_i} B(u-u_h)^2\,ds\right)^{1/2} \le C\left(2h^{k-1}\|u\|_{k+1,2,\Omega_i} + h^{k+1}\left(\|u\|_{k+2,2,\Omega_i} + \|u\|_{k+1,\infty,\Omega_i}\right)\right),$$

$$(3.31)\quad \||B|^{1/2}(u-u_h)\|_{h,\infty} \le C\left(2h^{k-\frac{3}{2}}\|u\|_{k+1,2,\Omega} + h^{k+1}\left(\|u\|_{k+2,2,\Omega} + \|u\|_{k+1,\infty,\Omega}\right)\right).$$

Démonstration : Pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on pose :

$$(3.32)\quad q_h = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial_-K \cap \partial_-\Omega \\ \text{trace extérieure de } R_h u & \text{sur } \partial_-K - (\partial_-K \cap \partial_-\Omega) \end{cases}$$

On utilise la relation (3.7) avec $v_h = R_h u$, $q = q_h$. Le membre de droite correspondant peut s'écrire :

$$(3.33)\quad E_K(u, u_h - R_h u) = \mu X_K(u, u_h - R_h u) + \nu Y_K(u, u_h - R_h u) + \int_K \sigma(u - R_h u)(u_h - R_h u)\,dx\,dy$$

où :

$$(3.34)\quad X_K(u,w) = \int_{\partial_+K} (u - R_h u) w n_x\,ds + \int_{\partial_-K} (u - q_h) w n_x\,ds -$$

$$- \int_K (u - R_h u)\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy$$

et où $Y_K(u,w)$ est défini de façon analogue.
On utilise maintenant le résultat essentiel suivant démontré plus loin.

Lemme 3.4 : On suppose que les hypothèses du Théorème 3.3 sont satisfaites. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que pour tout $w \in P_K^k$

$$(3.35)\quad |X_K(u,w)| + |Y_K(u,w)| \le C\left(2_K h_K^{k-1}\|u\|_{k+1,2,K} + h_K^{k+1}\|u\|_{k+2,2,K}\right)\|w\|_{L^2(K)}.$$

En utilisant les relations (3.26), (3.33) et (3.35), on obtient, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$

$$(3.36)\quad E_K(u, u_h - R_h u) \le C\left(2_K h_K^{k-1}\|u\|_{k+1,2,K} + h_K^{k+1}\|u\|_{k+2,2,K}\right)\|u_h - R_h u\|_{L^2(K)}.$$

En combinant la relation (3.7), avec $v_h = R_h u$, $q = q_h$, et l'inégalité (3.36), on a :

$$\frac{1}{2}\int_{\partial_+ K} B(u_h - R_h u)^2 ds + \alpha \| u_h - R_h u \|^2_{L^2(K)} \leq$$

$$\leq -\frac{1}{2}\int_{\partial_- K} B(t_h - q_h)^2 ds + C\left(Z_K h_K^{k-1} \|u\|_{k+1,2,K} + h_K^{k+1} \|u\|_{k+2,2,K}\right) \|u_h - R_h u\|_{L^2(K)}$$

En sommant sur tous les éléments K_j , $1 \leq j \leq i$, il vient :

$$(3.37)\quad \frac{1}{2}\int_{\partial_+ \Omega_i} B(u_h - R_h u)^2 ds + \alpha \| u_h - R_h u \|^2_{L^2(\Omega_i)} \leq$$

$$\leq C\left(Z_K h_K^{k-1} \|u\|_{k+1,2,\Omega_i} + h_K^{k+1} \|u\|_{k+2,2,\Omega_i}\right) \| u_h - R_h u \|_{L^2(\Omega_i)} .$$

Les estimations (3.29) et (3.30) découlent directement de l'inégalité (3.37) et du Lemme 3.3. La fonction $(u_h - R_h u)^2$ est un polynôme de P_{2k} sur chaque face S incluse dans $\partial_+ \Omega_i$. L'intégrale $\int_{\partial_+ \Omega_i} B(u_h - R_h u)^2 ds$ est donc calculée exactement en utilisant sur chaque face $S \subset \partial_+ \Omega_i$ une formule de quadrature construite à partir des abscisses de GAUSS-RADAU. En ces points, on a $u = R_h u$. D'autre part les poids associés à la formule sont minorés par le produit de la longueur du côté S par une constante indépendante de h. On en déduit alors l'inégalité (3.31).

Corollaire 3.1 : On suppose que les hypothèses du Théorème 3.3 sont satisfaites, et que l'inégalité (2.30) est vérifiée, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$. Alors on a :

$$|u - u_h|_{L^2(\Omega_i)} \leq C h^{k+1} \|u\|_{k+2,2,\Omega_i} \quad)$$

$$\left(\int_{\partial_+ \Omega_i} B(u - u_h)^2 ds\right)^{1/2} \leq C h^{k+1} \left(\|u\|_{k+2,2,\Omega_i} + \|u\|_{k+1,\infty,\Omega_i}\right) ,$$

$$\| |B|^{1/2} (u - u_h) \|_{h,\infty} \leq C h^{k+1/2} \left(\|u\|_{k+2,2,\Omega} + \|u\|_{k+1,\infty,\Omega}\right) .$$

Démonstration du Lemme 3.4 : En utilisant la correspondance biunivoque $v \longrightarrow \hat{v} = v \circ F_K$, on a :

$$(3.38)\quad X_K(u,w) = \hat{X}_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w}) + \hat{X}_{\hat{K},\eta}(\hat{u},\hat{w}) \quad ,$$

avec :

$$(3.39)\quad \hat{X}_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w}) = \int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{R}\hat{u})\,\hat{w}(1,\eta)\,\frac{y_1-y_4}{2}\,d\eta + \int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{q})\,\hat{w}(-1,\eta)\,\frac{y_3-y_2}{2}\,d\eta$$
$$- \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{R}\hat{u})\,\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\xi\,d\eta \quad ,$$

$$(3.40)\quad \hat{X}_{\hat{K},\eta}(\hat{u},\hat{w}) = \int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{R}\hat{u})\,\hat{w}(\xi,1)\,\frac{y_2-y_1}{2}\,d\xi + \int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{q})\,\hat{w}(\xi,-1)\,\frac{y_4-y_3}{2}\,d\xi$$
$$+ \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{R}\hat{u})\,\frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta}\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi\,d\eta \quad .$$

L'application linéaire $\hat{u} \longrightarrow \dfrac{\hat{X}_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w})}{h_K}$ est continue de $H^{k+2}(\hat{K})$ dans $\mathbb{R}$, de norme inférieure ou égale à $\hat{C}\,\|\hat{u}\|_{k+2,2,\hat{K}}\,|\hat{w}|_{L^2(\hat{K})}$.

Elle est identiquement nulle pour tout $\hat{u} \in Q_k$ d'après la définition de l'interpolée $\hat{R}\hat{u}$.

Pour $\hat{u} = \xi^{k+1}$, on a $\hat{u}(1,\eta) - \hat{R}\hat{u}(1,\eta) = \hat{u}(-1,\eta) - \hat{q}(-1,\eta) = 0$

D'autre part, $\dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}$ est de degré $\leq k-1$ par rapport à ξ , $\hat{u}-\hat{R}\hat{u}$ est un polynôme en ξ de degré $k+1$ qui s'annule aux abscisses de GAUSS-RADAU ; puisque

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(y_1+y_2-y_3-y_4) + \frac{\xi}{4}(y_1-y_2+y_3-y_4) \quad ,$$

il vient :

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{R}\hat{u})\,\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}\,\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\xi\,d\eta = \frac{1}{4}(y_1-y_2+y_3-y_4)\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{R}\hat{u})\,\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}\,\xi\,d\xi\,d\eta \,.$$

On en déduit que pour $\hat{u} = \xi^{k+1}$, on a :

$$(3.41)\quad \left|\frac{\hat{X}_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w})}{h_K}\right| \leq \hat{C}\,\frac{z_K}{h_K}\left|\frac{\partial^{k+1}\hat{u}}{\partial \xi^{k+1}}\right|\,|\hat{w}|_{L^2(\hat{K})} \,.$$

Pour $\hat{u} = \eta^{k+1}$, $(\hat{u}-\hat{R}\hat{u})$ est un polynôme de degré $k+1$ par rapport à η ne dépendant pas de la variable ξ . On a donc :

$$\hat{X}_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w}) = \frac{1}{4}(y_1-y_2+y_3-y_4)\left\{ \int_{-1}^{+1} (\hat{u}(1,\eta) - \hat{R}\hat{u}(1,\eta))\hat{w}(1,\eta) + (\hat{u}(-1,\eta)-\hat{q}(-1,\eta))\hat{w}(-1,\eta)\,d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{R}\hat{u}) \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}\, \xi\, d\xi\, d\eta \right\} ,$$

ou encore :

$$X_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w}) = \frac{1}{4}(y_1-y_2+y_3-y_4) \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\hat{u}-\hat{R}\hat{u})\,\hat{w}\, d\xi\, d\eta \quad .$$

on en déduit que pour $\hat{u} = \eta^{k+1}$, on a :

$$(3.42) \quad \left| \frac{\hat{X}_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w})}{h_K} \right| \leq \hat{C}\, \frac{z_K}{h_K} \left| \frac{\partial^{k+1}\hat{u}}{\partial \eta^{k+1}} \right|_{L^2(\hat{K})} |\hat{w}|_{L^2(\hat{K})} \quad ,$$

Des inégalités (3.41) et (3.42) on tire :

$$\left| \frac{X_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w})}{h_K} \right| \leq \hat{C}\, \frac{z_K}{h_K} [\hat{u}]_{k+1,2,\hat{K}} |\hat{w}|_{L^2(\hat{K})} \quad ,$$

pour tout $\hat{w} \in Q_k$ et tout $\hat{u} \in Q_k \cup P_{k+1}$.

En appliquant le Lemme 0.5, il vient :

$$(3.43) \quad \left| \frac{X_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w})}{h_K} \right| \leq C \left(\left(1+\frac{z_K}{h_K}\right) \left([\hat{u}]_{k+2,2,\hat{K}} + \left[\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial\xi\partial\eta}\right]_{k,2,\hat{K}} \right) + \frac{z_K}{h_K} [\hat{u}]_{k+1,2,\hat{K}} \right) |\hat{w}|_{L^2(\hat{K})} .$$

D'après le Lemme 0.9, on a :

$$(3.44) \quad [\hat{u}]_{k,2,\hat{K}} \leq C \inf_{-1\leq \xi,\eta \leq +1} \left(J_K(\xi,\eta)\right)^{-\frac{1}{2}} h_K^k\, |u|_{k,2,K} \quad ,$$

$$(3.45) \quad \left[\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial\xi\partial\eta}\right]_{k,2,\hat{K}} \leq C \inf_{-1\leq \xi,\eta \leq +1} \left(J_K(\xi,\eta)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(h_K^k\, z_K |u|_{k+1,2,K} + h_K^{k+2} |u|_{k+3,2,K} \right) .$$

En combinant les relations (3.43), (3.44) et (3.45) avec le Lemme 0.7, on obtient l'inégalité

$$\left|\hat{X}_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w})\right| \leq C \left\{ \left(h_K^{k-1} z_K + h_K^{k-2} z_K^2 \right) |u|_{k+1,2,K} + \left(h_K^{k+1} + h_K^k z_K \right) |u|_{k+2,2,K} \right\} |w|_{L^2(K)} .$$

D'autre part, on a nécessairement l'inégalité $z_K \leq h_K$

On en déduit :

$$(3.46) \quad \left|\hat{X}_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w})\right| \leq C \left(h_K^{k-1} z_K |u|_{k+1,2,K} + h_K^{k+1} |u|_{k+2,2,K} \right) |w|_{L^2(K)} .$$

On peut montrer de la même manière que l'inégalité (3.46) est encore valable si on remplace $\left|\hat{X}_{\hat{K},\xi}(\hat{u},\hat{w})\right|$ par $\left|\hat{X}_{\hat{K},\eta}(\hat{u},\hat{w})\right|$. On en déduit que l'inégalité (3.46) est valable lorsque le membre de gauche est remplacé par $\left|X_K(u,w)\right|$. Le terme $\left|Y_K(u,w)\right|$ se majore de la même façon et on a ainsi le Lemme 3.4.

III.4 - Résultats numériques

Dans ce paragraphe, on utilise certains des schémas numériques décrits aux paragraphes 2 et 3 pour résoudre quelques problèmes simples.

On résout d'abord le problème (1.1), (1.2), lorsque le domaine est triangulé en quadrilatères quelconques, en utilisant les schémas (2.19), (2.22) avec $k = 1$ et (3.1) avec $k = 1$. On donne dans les trois cas les valeurs de l'erreur quadratique pour différentes triangulations.

On résout ensuite le problème (1.1), (1.2) pour deux seconds membres différents, en utilisant le schéma (2.22) pour $k = 2$, avec des éléments finis rectangulaires. On montre l'influence de la régularité de la solution sur la précision du schéma.

Les essais numériques ont été programmés et mis au point par J. GERIN-ROZE.

Problème 1 : Soit $\Omega =]0, \frac{1}{2}[\times]0, \frac{1}{2}[$. On veut résoudre le problème :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = S \qquad \Omega \quad , \tag{4.1}$$

avec :

$$\sigma = 1 \qquad \text{sur} \quad \Omega \quad ,$$

$$\mu = \nu = 0.577 \simeq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{\nu x + \mu y}{1 - x^2 y^2} + \sigma \operatorname{argth}(xy) \cdot \tag{4.2}$$

Les conditions aux limites (1.10) s'écrivent :

$$u(0,y) = u(x,0) = 0 \tag{4.3}$$

Le second membre S a été choisi de telle sorte que l'on connaît la solution u du problème :

$$u(x,y) = \operatorname{argth}(xy) \cdot \tag{4.4}$$

Pour tester les schémas décrits aux paragraphes 2 et 3, on a choisi les différents "maillages tordus" (triangulations de Ω en quadrilatères convexes quelconques) dessinés sur la fig. 4.1. Sur cette figure, le maillage (10 x 10) se déduit du maillage (5 x 5) en traçant les médianes de chaque quadrilatère ; on répète cette même procédure pour obtenir les maillages (20 x 20) et (40 x 40). On résout numériquement le problème (4.1) en utilisant le schéma (2.19) (méthode continue, généralisation du schéma D.S.N. [22]) le schéma (2.22) avec $k = 1$ méthode continue, généralisation du schéma S.N.G. [21]) et le schéma (3.1) avec $k = 1$ (méthode discontinue).

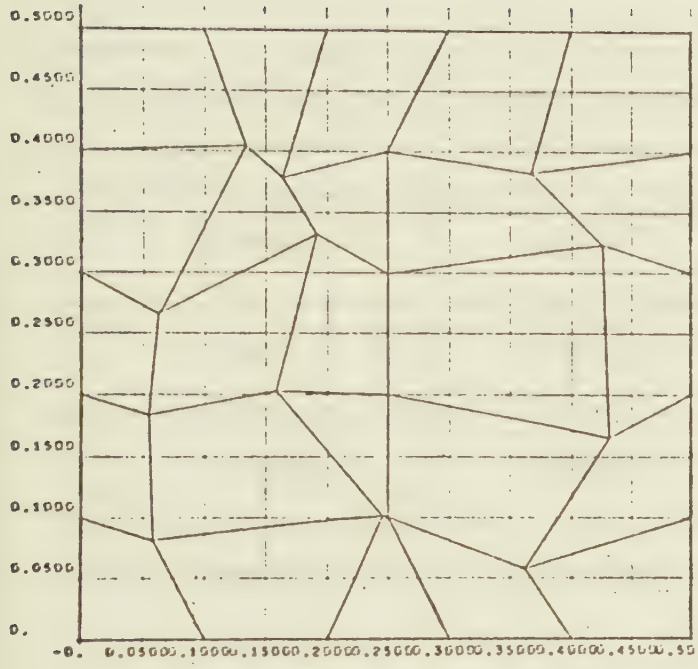
La direction caractéristique étant parallèle à la première bissectrice, tous les quadrilatères ont deux (et seulement deux) faces éclairées et la condition de stabilité (2.31), (2.32) est satisfaite.

Pour ces trois schémas, on définit l'erreur entre la solution approchée u_h et la solution exacte u par :

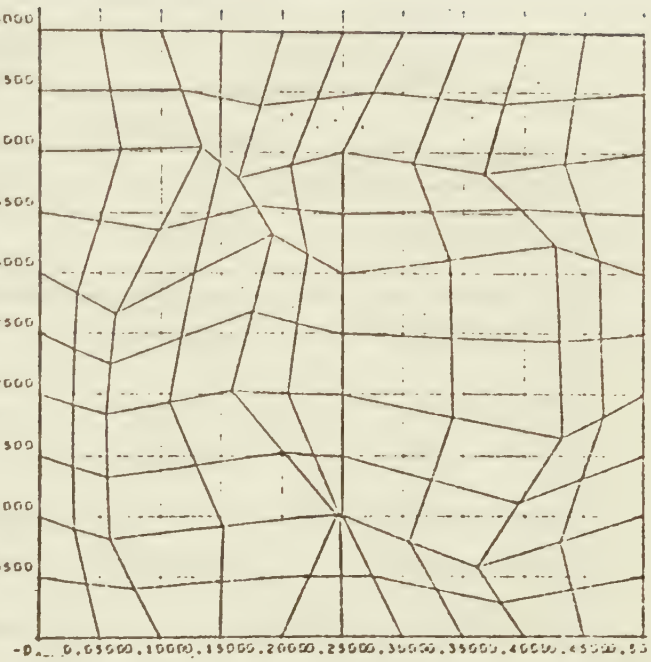
$$\text{Erreur} = \left(\sum_{K \in \mathcal{B}_h} \text{aire } K \left(u(G_K) - u_h(G_K) \right)^2 \right)^{1/2} \quad , \tag{4.5}$$

où G_K désigne barycentre du quadrilatère K . Dans le tableau I, on donne les valeurs de l'erreur définie ci-dessus, pour les trois schémas étudiés et pour les différents maillages.

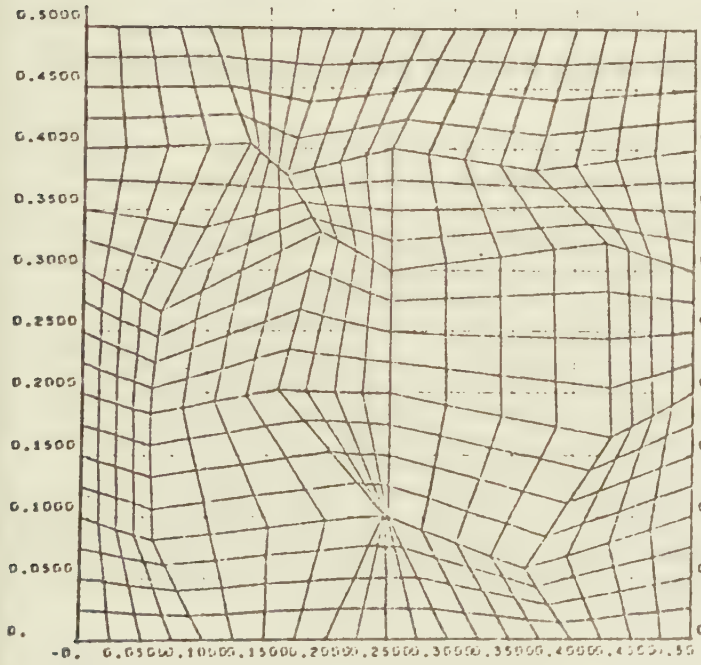
- Figure 4.1



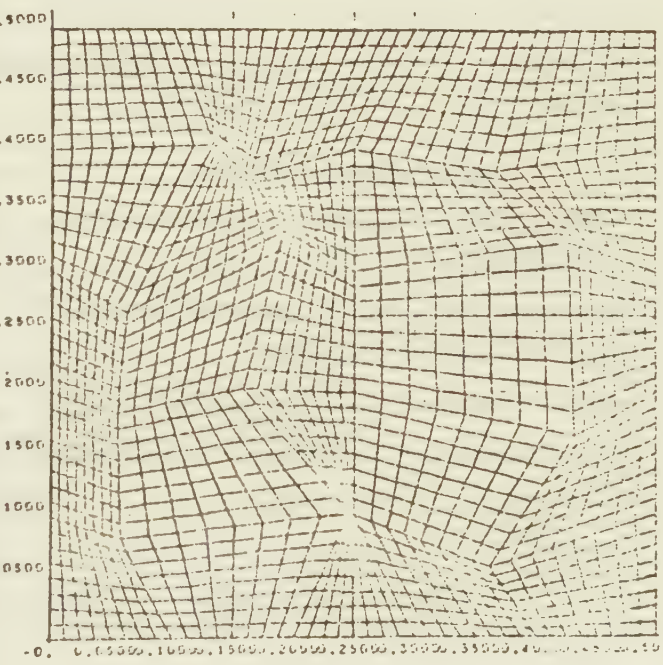
Maillage (5 x 5)



Maillage (10 x 10)



Maillage (20 x 20)



Maillage (40 x 40)

TABLEAU I

Erreur / Maillage	Méthode continue Schéma 2.19	Méthode continue Schéma 2.22	Méthode discontinue Schéma 3.1
(5 x 5)	0.01100	0.00444	0.000172
(10 x 10)	0.00239	0.00172	0.000057
(20 x 20)	0.00055	0.00040	0.000015
(40 x 40)	0.00013	0.000010	0.000004

Les résultats contenus dans le tableau I montrent que pour les trois schémas, l'erreur est de l'ordre de h^2, ce qui était prévisible, d'après les Théorèmes 2.4, 2.6 et 3.3, les quadrilatères étant en fait peu déformés (hypothèse 2.30).

Les résultats montrent que pour un maillage donné (à h fixé) la méthode discontinue est plus précise que la méthode continue. Pour un maillage donné, le nombre de degrés de liberté est quatre fois plus grand pour la méthode discontinue que pour la méthode continue. Si on compare ces deux méthodes à nombre égal de degrés de liberté (sur le tableau I, on considère le maillage 10 x 10 pour la méthode discontinue et le maillage 20 x 20 pour la méthode continue), on constate que la méthode discontinue est encore la plus précise. On peut d'ailleurs trouver une remarque semblable dans [43]. Enfin, il faut souligner le fait que la méthode discontinue est inconditionnellement stable, et permet ainsi une bonne approximation de flux présentant de forts gradients.

Problème 2 : Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On veut résoudre

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = S \quad , \text{ pour } (x,y) \in \Omega \quad , \tag{4.6}$$

avec

$$\sigma = 1$$

$$\mu = \nu = 0,577$$

$$S = 1 \qquad \text{(Problème 2.a)} \tag{4.7}$$

$$S = \frac{\pi}{2}(\mu y + \nu x) \cos \frac{\pi x y}{2} + \sigma \sin \frac{\pi x y}{2} \qquad \text{(Problème 2b)} \tag{4.8}$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$u(0,y) = u(x,0) = 0 \tag{4.9}$$

La solution du Problème (2.a) est donnée par (Exemple 1.14)

$$u_a(x,y) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{y}{\nu}\right) & \text{si} \quad x > y \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) & \text{si} \quad x < y \end{cases} \tag{4.10}$$

La solution du Problème (2.b) est donnée par :

$$u_b(x,y) = \sin \frac{\pi x y}{2} \quad . \tag{4.11}$$

Le domaine Ω est "triangulé" en carrés égaux (figure 4.2). On utilise le schéma (2.22) (méthode continue), avec $k = \ell$. La condition de stabilité (2.31), (2.32) est satisfaite. On veut vérifier si la précision du schéma (2.22) croît avec le degré des polynômes utilisés.

On a effectué des calculs pour des maillages composés respectivement de 4, 16, 64 et 256 carrés, les côtés de ces carrés ayant une longueur égale à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$. Pour les deux problèmes (2.a) et (2.b), l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée est évaluée dans la norme discrète $|\cdot|_{k,k}$ définie au § 2 et utilisant les abscisses de GAUSS-LEGENDRE. Dans le Tableau II, on donne les valeurs de cette erreur pour les deux problèmes et pour les différents maillages.

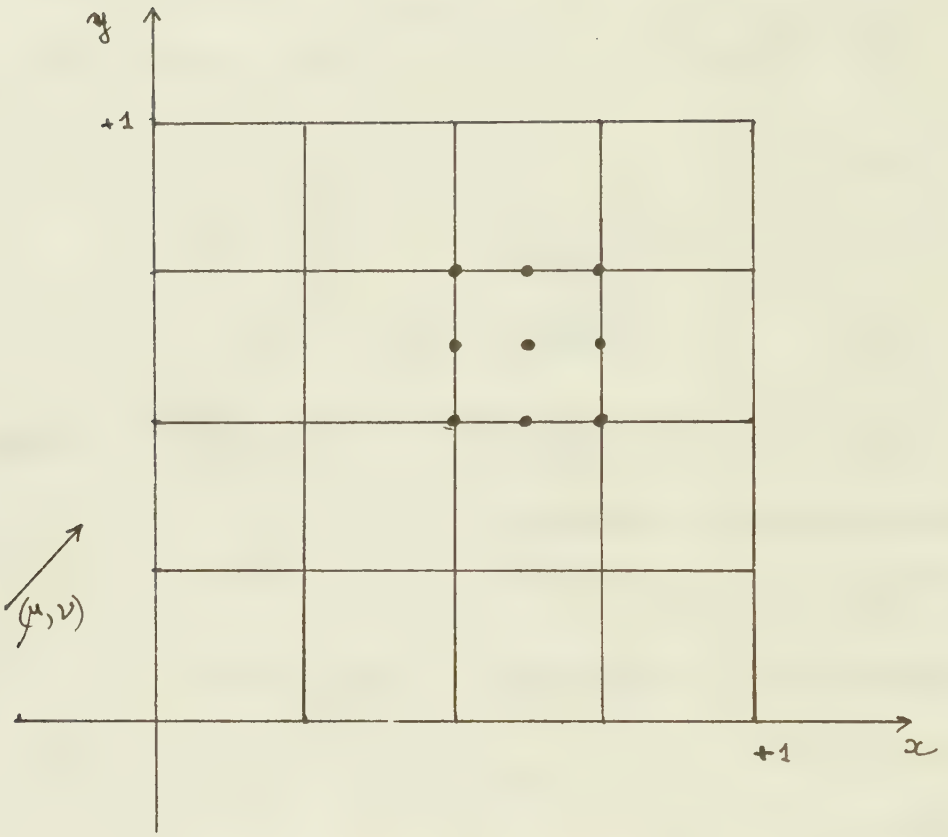


Figure 4.2 Maillage 4.4

• : degrés de liberté sur un élément

TABLEAU II

Erreur / Maillage	Problème 2.a	Problème 2.b
(2 x 2)	$0.394\ 10^{-1}$	$0.305\ 10^{-2}$
(4 x 4)	$0.133\ 10^{-1}$	$0.391\ 10^{-3}$
(8 x 8)	$0.465\ 10^{-2}$	$0.491\ 10^{-4}$
(16 x 16)	$0.164\ 10^{-2}$	$0.614\ 10^{-5}$

Dans le cas du problème 2.b on constate que l'erreur est en $O(h^3)$, conformément aux conclusions du Théorème 2.6. Par contre, dans le cas du problème 2.a, l'erreur est en $O(h^{3/2})$. Ceci provient du fait que la solution exacte du problème 2.a n'appartient pas à l'espace $H^4(\Omega)$: la fonction $u_a(x,y)$ est C^∞ dans les deux parties du domaine Ω séparées par la lère bissectrice, elle est continue sur $\overline{\Omega}$, mais ses dérivées premières présentent des discontinuités le long de la droite $y=x$. La perte de précision provient des carrés qui sont traversés par la lère bissectrice.

L'intérêt de ce problème 2.a est donc de montrer sur un exemple simple que lorsque la solution présente certaines singularités, il est inutile d'utiliser des schémas trop sophistiqués, construits avec des polynômes de degré (On peut d'ailleurs trouver la même remarque dans [43]).

CHAPITRE IV

APPROXIMATION DE L'EQUATION DE TRANSPORT EN GEOMETRIE SPHERIQUE MONODIMENSIONNELLE PAR DES METHODES D'ELEMENTS FINIS CONTINUES

Ce Chapitre est consacré à la résolution numérique de l'équation de transport en géométrie monodimensionnelle sphérique (r,μ) :

$$\mu \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) + r \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)u\right) + \sigma r^2 u = r^2 S \quad , \text{ pour } (r,\mu) \in]0,R[\times]-1,+1[\, ,$$

$$u(R,\mu) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \mu < 0 \quad .$$

Le plan du Chapitre est le suivant :

1) On rappelle quelques propriétés du problème, très utiles par la suite pour définir les schémas numériques que l'on peut résoudre maille par maille en suivant la direction caractéristique, et satisfaisant certaines propriétés de conservation.

2) On définit une méthode continue, permettant la résolution du problème en suivant les caractéristiques. On donne des conditions suffisantes pour satisfaire les propriétés de conservation, définissant ainsi toute une famille de schémas numériques. On considère plus particulièrement deux de ces schémas, l'un d'entre eux n'étant pas autre chose que le schéma classique D.S.N. [22].

3) On montre la stabilité des deux schémas décrits au paragraphe 2, pour différentes normes avec poids, analogues discrets de la norme : $\left(\int_0^R \int_{-1}^{+1} \frac{r^\gamma}{(1-\mu^2)^\delta} u^2 \, dr \, d\mu \right)^{1/2}$. On donne ensuite des résultats de majorations d'erreur dans ces différentes normes. En particulier, pour $\gamma = 2$, $\delta = 0$, on a une erreur en $O(h^{4/6} |\text{Log } h|^{1/2})$ et pour $\gamma = \delta = 0$, une erreur en $O(h^{3/2} |\text{Log } h|^{1/2})$.

4) Essais numériques.

IV.1 - Position du problème

On considère l'équation de transport en géométrie monodimensionnelle qui s'écrit sous la forme du problème du premier ordre suivant ([1], [22], [23], [44]).

$$(1.1) \qquad Hu \equiv \mu \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) + r\frac{\partial}{\partial \mu}((1-\mu^2)u) + \sigma r^2 u = r^2 S \ ,$$

pour $(r,\mu) \in \Omega =]0,R[\times]-1,+1[$,

$$(1.2) \qquad u(R,\mu) = 0 \ , \text{ pour } \mu < 0 \ .$$

La fonction $u(r,\mu)$ représente un flux de neutrons situés à la distance r de l'origine et ayant une vitesse $\vec{v}$ telle que $\vec{r}.\vec{v} = r|\vec{v}|\mu$, où $\vec{r}$ désigne le rayon vecteur. La quantité σ représente une section efficace et la fonction S prend en compte les termes de fission et les sources. La condition aux limites (1.2) signifie qu'aucun neutron ne pénètre dans la sphère de rayon R .

L'équation (1.1) peut aussi s'écrire :

$$(1.3) \qquad Hu \equiv \mu r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + r(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu} + \sigma r^2 u = r^2 S \ .$$

L'équation (1.3) rendre dans le cadre des systèmes symétriques de FRIEDRICHS [13] étudiés aux Chapitres I et II et <u>les conditions aux limites admissibles</u> ne sont pas autre chose que les conditions (1.2). En effet, pour $r = 0$ ou pour $\mu = \pm 1$ on a $B = 0$; d'après le Lemme I.1.4, on a donc $M = 0$ et il n'y a donc pas de conditions aux limites à imposer pour $r = 0$ ou pour $\mu = \pm 1$. Pour $r = R$, on a $B = \mu R^2$; d'après le Lemme I.1.4, on a $M = |\mu| R^2$, et on en déduit les conditions aux limites (1.2).

<u>Remarque 1.1</u> : On pose $m_\ell = \int_{-1}^{+1} \mu^\ell u(r,\mu)\, dr\, d\mu$, pour $\ell = 0, 1, 2, \ldots$. En intégrant formellement l'équation (1.1) par rapport à la variable μ , il vient :

$$(1.4) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r^2 m_1) + \sigma r^2 m_0 = r^2 \int_{-1}^{+1} S\, d\mu \ .$$

Cette relation montre que le mécanisme de transfert directionnel exprimé par le

terme $\frac{\partial}{\partial \mu}\left(r(1-\mu^2)u\right)$ n'a pas d'influence sur le nombre total de particules. (Propriété de conservation 1).

Remarque 1.2 : Si on intègre en r la relation (1.4) entre a et b, il vient :

$$(1.5)\quad b^2 m_1(b) - a^2 m_1(a) + \int_a^b \sigma r^2 m_1(r)\, dr = \int_a^b \int_{-1}^{+1} r^2 S \, dr\, d\mu \quad ,$$

ce qui exprime la relation de conservation suivante (Propriété 2) :

Flux sortant + Captures = Flux entrant + Sources.

Remarque 1.3 : L'équation (1.3) divisée par r^2 et les conditions aux limites (1.2) peuvent encore s'écrire :

$$(1.6)\quad \frac{du}{ds} + \sigma u = S \quad ,$$

$$(1.7)\quad u(0) = 0 \quad ,$$

où $\frac{d}{ds}$ désigne la dérivée le long des courbes caractéristiques d'équation $r^2(1-\mu^2) = \text{cste}$ (figure 1.1).

La solution u en un point s_0 d'une courbe caractéristique ne dépend donc que des valeurs de u (et des constantes physiques σ et S) aux points de cette caractéristique, en amont de s_0 (figure 1) (Propriété 3).

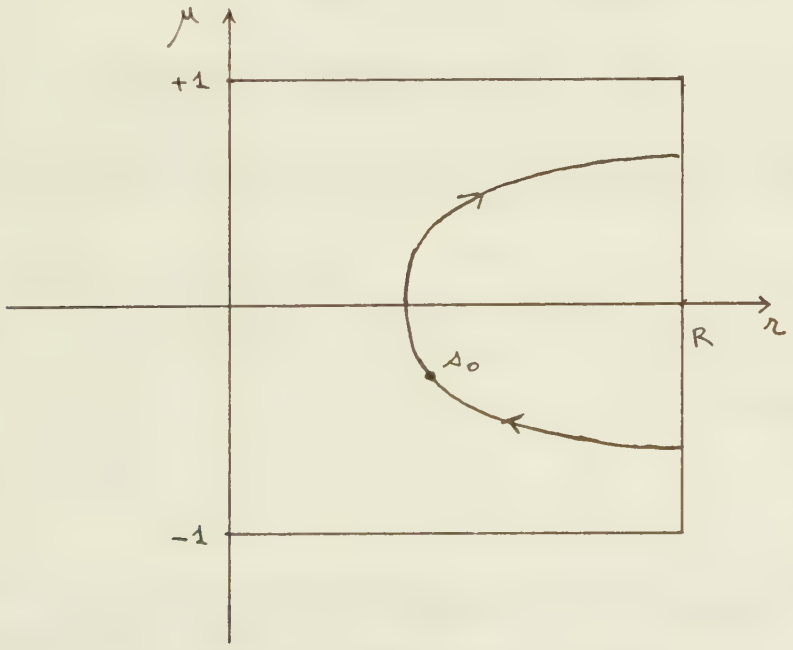


Figure 1.1

Les trois Remarques précédentes vont jouer un rôle fondamental lors de l'approximation numérique du problème (1.1), (1.2). On essaiera, comme au Chapitre III, de définir des schémas numériques au moyen de méthodes d'éléments finis continues ([27], [28], [42]) permettant de satisfaire, de façon discrète les propriétés de conservation 1 et 2 et de résoudre numériquement le problème en suivant les directions caractéristiques (Propriété 3). Avant de passer à la définition des schémas numériques, on peut faire la remarque suivante très utile par la suite.

Remarque 1.4 : Pour des raisons de symétrie, on a l'égalité [23] :

$$u(0,\mu) = u(0,-\mu) \quad , \text{ pour } -1 \leq \mu \leq +1 \ . \tag{1.8}$$

On considère les découpages suivants des intervalles $[-1,+1]$ et $[0,R]$, pour des entiers I et $J \geq 1$:

$$-1 = \mu_{-J} < \mu_{-J+1} < \cdots < \mu_0 = 0 < \mu_1 < \cdots < \mu_{J-1} < \mu_J = +1 \ , \tag{1.9}$$

$$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_I = R \ . \tag{1.10}$$

Dans la suite, on suppose toujours, comme c'est le cas en pratique ([22], [44]), que

$$\mu_{-j+1} = \mu_{j-1} \quad , \text{ pour tout } j = 1, \cdots, J \tag{1.11}$$

Le domaine $\bar{\Omega} = [0,R] \times [-1,+1]$ est "triangulé" en rectangles

$$K_{ij} = [r_i, r_{i+1}] \times [\mu_j, \mu_{j+1}] \quad , \ 0 \leq i \leq I-1, \ -J \leq j \leq J-1 \ . \tag{1.12}$$

On note A_{ij}, $0 \leq i \leq I$, $-J \leq j \leq J-1$, le point de coordonnées (r_i, μ_j). Pour $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq J-1$, on pose :

$$\partial_- K_{ij} = \left\{ (r,\mu) \in \partial K_{ij} \ ; \ \mu r^2 n_r + r(1-\mu^2) n_\mu < 0 \right\} \ , \tag{1.13}$$

$$\partial_+ K_{ij} = \partial K_{ij} - (\partial_- K_{ij}) \quad , \tag{1.14}$$

où n_r et n_μ désignent les composantes de la normale extérieure à la frontière ∂K_{ij} du rectangle K_{ij}. Les côtés de K_{ij} inclus dans $\partial_- K_{ij}$ (resp. $\partial_+ K_{ij}$) sont les côtés éclairés (resp. non éclairés) du rectangle K_{ij}, par lesquels les courbes caractéristiques rentrent dans (resp. sortent du) le rectangle K_{ij}.

Pour satisfaire de façon discrète la propriété 3, on impose, comme au Chapitre III, le principe suivant ([27], [30], [42]) :

(1.15) $\left\{\begin{array}{l} \text{On ne peut faire le calcul du flux approché sur l'élément } K_{ij} \\ \text{que si l'on connaît déjà la valeur du flux sur la portion} \\ \text{éclairée } \partial_- K_{ij} \text{ de la frontière de } K_{ij} \end{array}\right.$

Puisque les éléments K_{ij} , $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq J-1$ sont rectangulaires, on a le résultat suivant :

Lemme 1.1 : On peut faire les calculs en suivant le principe (1.15) en considérant successivement les éléments K_{ij} pour les valeurs décroissantes de i , $I-1 \geq i \geq 0$ et croissantes de j , $-J \leq j \leq -1$ puis pour les valeur croissantes de i , $0 \leq i \leq I-1$ et les valeurs croissantes de j , $0 \leq j \leq J-1$ comme sur la figure 1.2.

Démonstration : Pour $-(J-1) \leq j \leq -1$, on a :

(1.16) $$\partial_- K_{ij} = \text{côté}\,(A_{i+1,j}\, A_{i+1,j+1}) \bigcup \text{côté}\,(A_{ij}\, A_{i+1,j}) \quad ,$$

pour $0 \leq i \leq I-1$.

Pour $j = -J$, on a :

(1.17) $$\partial_- K_{ij} = \text{côté}\,(A_{i+1,j}\, A_{i+1,j+1})$$

D'autre part, d'après les conditions aux limites (1.2), on connaît la solution le long des côtés $(A_{I,j}\, A_{I,j+1})$, $-J \leq j \leq 1$. On en déduit le cheminement donné par le Lemme 1.1 pour les valeurs de j comprises entre $-J$ et -1

Pour $0 \leq j \leq J-1$, on a :

(1.18) $$\partial_- K_{ij} = \text{côté}\,(A_{ij}\, A_{ij+1}) \bigcup \text{côté}\,(A_{ij}\, A_{i+1,j}) \quad , \quad 1 \leq i \leq I-1 \, ,$$

et

(1.19) $$\partial_- K_{oj} = \text{côté}\,(A_{oj}\, A_{1j}) \quad .$$

On en déduit le cheminement donné par le Lemme 1.1 pour les valeurs de j comprises entre 0 et $J-1$.

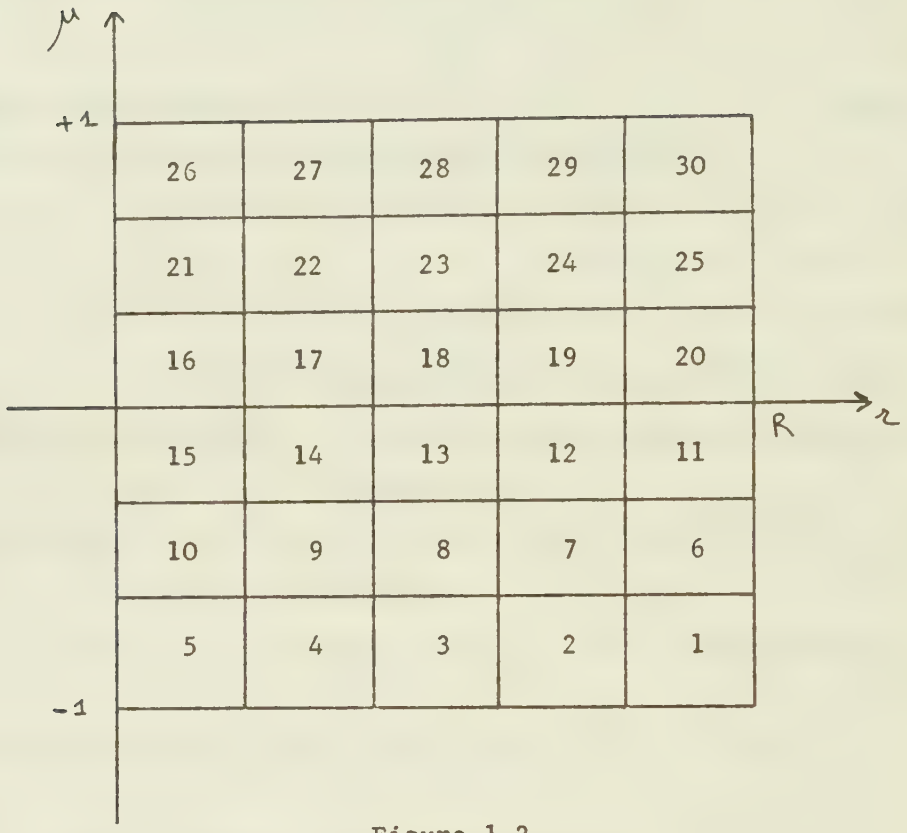


Figure 1.2

Exemple de cheminement

Remarque 1.5 : Dans le cas de la méthode continue, on a en fait besoin des valeurs du flux pour $\mu = -1$, $0 \leq r \leq R$ et pour $r = 0$, $\mu > 0$, pour définir la solution approchée, bien que les courbes caractéristiques soient tangentes à la frontière $\partial\Omega$ le long de ces portions de frontières.

IV.2 - Méthodes continues pour résoudre le Problème (1.1), (1.2) : Définitions

Dans ce paragraphe, on définit des méthodes d'éléments finis continues pour résoudre le problème (1.1), (1.2), utilisant le maillage décrite au paragraphe 1. On fait l'hypothèse que la restriction du flux approché à chaque rectangle de la triangulation est un polynôme de P_1. On donne des conditions suffisantes pour que les schémas numériques obtenus satisfassent de façon discrète les propriétés de conservation données au paragraphe 1. On décrit enfin de façon plus précise deux exemples de schémas, dus respectivement à REED et LATHROP [44], et RAVIART (communication personnelle) satisfaisant les propriétés évoquées ci-dessus. La stabilité et la convergence de ces schémas seront étudiées au paragraphe 3.

A chaque intervalle $[r_i, r_{i+1}]$, $0 \le i \le I-1$, et $[\mu_j, \mu_{j+1}]$, $-J \le j \le J-1$, on associe respectivement des coefficients $\theta_{i+\frac{1}{2}}$ et $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$, compris entre 0 et 1, à choisir ultérieurement, et tels que :

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} = 1 - \alpha_{-j-\frac{1}{2}} \quad , \quad 0 \le j \le J-1 \tag{2.2}$$

On pose :

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \theta_{i+\frac{1}{2}} r_{i+1} + (1-\theta_{i+\frac{1}{2}}) r_i \quad , \quad 0 \le i \le I-1 \quad , \tag{2.3}$$

$$\mu_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+1} + (1-\alpha_{j+\frac{1}{2}}) \mu_j \quad , \quad -J \le j \le J-1 \ . \tag{2.4}$$

Soient $A_{i,j+\frac{1}{2}}$ (resp. $A_{i+\frac{1}{2},j}$ et $A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$) les points de coordonnées

$(r_i, \mu_{j+\frac{1}{2}})$, $0 \le i \le I$, $-J \le j \le J-1$ (resp. $(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_j)$,

$0 \le i \le I-1$, $-J \le j \le +J$ et $(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}})$, $0 \le i \le I-1$, $-J \le j \le J-1$).

Sur chaque élément K_{ij} , le flux u est choisi de la forme $a + br + c\mu$ et est déterminé par ses valeurs aux points $A_{i,j+\frac{1}{2}}$, $A_{i+1,j+\frac{1}{2}}$, $A_{i+\frac{1}{2},j}$, $A_{i+\frac{1}{2},j+1}$, les relations suivantes étant satisfaites (figure 2.1)

$$\theta_{i+\frac{1}{2}} u(A_{i+1,j+\frac{1}{2}}) + (1-\theta_{i+\frac{1}{2}}) u(A_{i,j+\frac{1}{2}}) = u(A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) \ , \tag{2.5}$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} u(A_{i+\frac{1}{2},j+1}) + (1-\alpha_{j+\frac{1}{2}}) u(A_{i+\frac{1}{2},j}) = u(A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) \ . \tag{2.6}$$

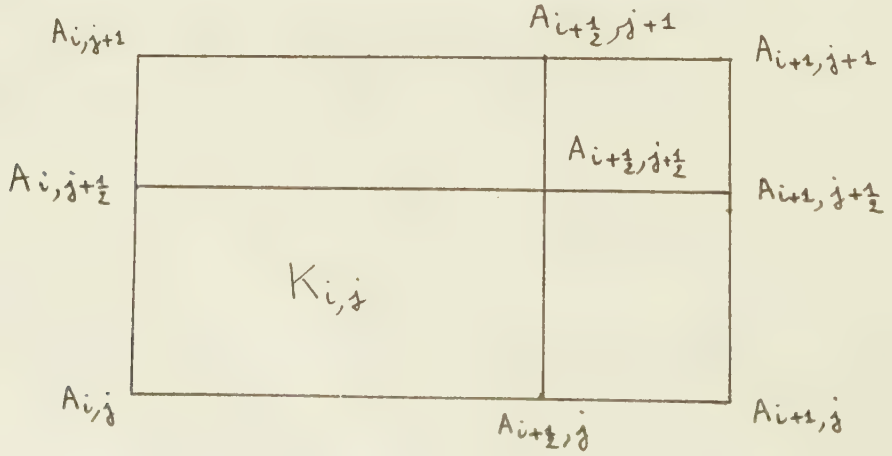


Figure 2.1

Soit V_R l'espace des fonctions v_R dont la restriction à chaque rectangle K_{ij} est un polynôme de P_1, et continues aux points $A_{i,j+\frac{1}{2}}$, $0 \le i \le I$, $-J \le j \le J-1$, et $A_{i+\frac{1}{2},j}$, $0 \le i \le I-1$, $-J \le j \le J$

On a : dimension de $V_R = 2IJ + 2J + I$. Par la suite, on note, pour $v_R \in V_R$:

$$v_{i+\frac{1}{2},j} = v_R(A_{i+\frac{1}{2},j}) \quad , \quad 0 \le i \le I-1 \quad , \quad -J \le j \le J \ ,$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_R(A_{i,j+\frac{1}{2}}) \quad , \quad 0 \le i \le I \quad , \quad -J \le j \le J-1 \ ,$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = v_R(A_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) \quad , \quad 0 \le i \le I-1 \quad , \quad -J \le j \le J-1 \ .$$

On pose le problème suivant : <u>Trouver</u> $u_R \in V_R$ <u>telle que</u> :

$$\int_{K_{ij}} (H u_R - r^2 S)\, dr\, d\mu = 0 \quad , \quad 0 \le i \le I-1 \ , \ -J \le j \le J-1 \ , \tag{2.7}$$

$$u_R(A_{I,j+\frac{1}{2}}) = 0 \quad , \quad -J \le j \le -1 \ . \tag{2.8}$$

Pour calculer les intégrales intervenant dans la formulation (2.7), on utilise une formule de quadrature construite de la façon suivante :

$$\int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} g(\mu)\, d\mu \sim \omega_{j+\frac{1}{2}}\, g(\mu_{j+\frac{1}{2}}) \ , \tag{2.9}$$

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} f(r)\, dr \sim w_{i+\frac{1}{2}}\, f(r_{i+\frac{1}{2}}) \ , \tag{2.10}$$

ce qui induit sur K_{ij} la formule :

$$\int_{K_{ij}} v(r,\mu)\, dr\, d\mu \sim w_{i+\frac{1}{2}}\, \omega_{j+\frac{1}{2}}\, v(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \ , \tag{2.11}$$

où les $r_{i+\frac{1}{2}}$, $0 \le i \le I-1$, et $\mu_{j+\frac{1}{2}}$, $-J \le j \le J-1$ sont définis respectivement en (2.3) et (2.4), et où les quantités $w_{i+\frac{1}{2}}$ et $\omega_{j+\frac{1}{2}}$ sont des poids positifs et pour des raisons de symétrie ([22]) on s'impose les relations :

$$\omega_{j+\frac{1}{2}} = \omega_{-j-\frac{1}{2}} \quad , \quad 0 \le j \le J-1 \ . \tag{2.12}$$

Les relations (2.7) deviennent alors :

$$(2.13)\quad \left(H u_k - r^2 S\right)\left(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) = 0 \ , \quad 0 \le i \le I-1 \ , \ -J \le j \le J-1 \ .$$

Les paramètres $\omega_{j+\frac{1}{2}}$, $\mu_{j+\frac{1}{2}}$, $w_{i+\frac{1}{2}}$ et $r_{i+\frac{1}{2}}$ intervenant dans les formules (2.9) et (2.10) sont déterminés de telle sorte que les propriétés de conservation soient satisfaites de façon discrète. On pose :

$$(2.14)\quad m_{\ell,k}(r) = \sum_{j=-J}^{J-1} \omega_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}}^{\ell} u_k\left(r, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) \ .$$

Lemme 2.1 : Une condition suffisante pour que la propriété de conservation 1 soit vérifiée de façon discrète est que les relations suivantes soient satisfaites, définissant les scalaires β_j :

$$(2.15)\quad \frac{\omega_{j+\frac{1}{2}}}{\mu_{j+1}-\mu_j}\left(1+2\mu_{j+1}\mu_{j+\frac{1}{2}}-3\mu_{j+\frac{1}{2}}^2\right) = \frac{\omega_{j-\frac{1}{2}}}{\mu_j-\mu_{j-1}}\left(1+2\mu_{j-1}\mu_{j-\frac{1}{2}}-3\mu_{j-\frac{1}{2}}^2\right) = \beta_j \ ,$$

pour $-J+1 \le j \le J-1$,

$$(2.16)\quad 1+2\mu_{J-1}\mu_{J-\frac{1}{2}}-3\mu_{J-\frac{1}{2}}^2 = 1+2\mu_{-J+1}\mu_{-J+\frac{1}{2}}-3\mu_{-J+\frac{1}{2}}^2 = 0 \ .$$

Démonstration : En sommant les relations (2.13) pour $-J \le j \le J-1$ on a :

$$(2.17)\quad \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 m_{1,k}\right)\right)\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right) + \sum_{j=-J}^{J-1} \omega_{j+\frac{1}{2}} \left(r \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)u_k\right)\right)\left(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ \sigma r_{i+\frac{1}{2}}^2 m_{0,k}\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right) = r_{i+\frac{1}{2}}^2 \sum_{j=-J}^{J-1} \omega_{j+\frac{1}{2}} S\left(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) \ .$$

Pour satisfaire la propriété 1, on doit écrire :

$$(2.18)\quad \sum_{j=-J}^{J-1} \omega_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)u_k(r,\mu)\right)\right)\left(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) = 0 \ , \quad 0 \le i \le I-1 \ .$$

On obtient alors la relation suivante, analogue discret de l'égalité (1.4)

$$(2.19)\quad \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 m_{1,k}\right)\right)\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right) + \sigma r_{i+\frac{1}{2}}^2 m_{0,k}\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right) = r_{i+\frac{1}{2}}^2 \sum_{j=-J}^{J-1} \omega_{j+\frac{1}{2}} S\left(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) \ .$$

Pour $r = r_{i+\frac{1}{2}}$, la fonction $u_R(r,\mu)$ est continue par rapport à la variable μ sur $[-1,+1]$, et linéaire sur chaque intervalle $[\mu_j, \mu_{j+1}]$, $-J \le j \le J-1$.
Posons $u_R(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_j) = u_j$, $-J \le j \le J$.

On a alors :

$$u_R(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) = \alpha_{j+\frac{1}{2}} u_{j+1} + (1-\alpha_{j+\frac{1}{2}}) u_j \quad , \quad -J \le j \le J-1 .$$

La relation (2.18) s'écrit alors :

$$(2.20) \quad \sum_{j=-J}^{J-1} \omega_{j+\frac{1}{2}} \left\{ -2\mu_{j+\frac{1}{2}} \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}} u_{j+1} + (1-\alpha_{j+\frac{1}{2}}) u_j \right) + (1-\mu_{j+\frac{1}{2}}^2) \frac{u_{j+1}-u_j}{\mu_{j+1}-\mu_j} \right\} = 0$$

Une condition suffisante pour que la propriété 1 soit satisfaite est que la relation (2.20) soit satisfaite quel que soit u_j , $-J \le j \le J$.
On en déduit les égalités suivantes :

$$-\omega_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\mu_{j+\frac{1}{2}}^2}{\mu_{j+1}-\mu_j} + 2(1-\alpha_{j+\frac{1}{2}}) \mu_{j+\frac{1}{2}} \right) + \omega_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\mu_{j-\frac{1}{2}}^2}{\mu_j - \mu_{j-1}} - 2\alpha_{j-\frac{1}{2}} \mu_{j-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

pour $-J+1 \le j \le J-1$,

$$1 - \mu_{J-\frac{1}{2}}^2 - 2\alpha_{J-\frac{1}{2}} \mu_{J-\frac{1}{2}} (\mu_J - \mu_{J-1}) = 0 ,$$

$$1 - \mu_{-J+\frac{1}{2}}^2 + 2(1-\alpha_{-J+\frac{1}{2}}) \mu_{-J+\frac{1}{2}} (\mu_{-J+1} - \mu_{-J}) = 0 .$$

En remplaçant $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$ par sa valeur $\dfrac{\mu_{j+\frac{1}{2}} - \mu_j}{\mu_{j+1} - \mu_j}$, on obtient les reslations (2.15) et (2.16).

Remarque 2.1 : Les relations de symétrie (1.11), (2.2) et (2.12) impliquent qu'il est suffisant de satisfaire les égalités (2.15) et (2.16) pour les valeurs positives de j .

Remarque 2.2 : A partir des relations (2.15), on peut écrire les égalités

$$(2.21) \quad \beta_{j+1} - \beta_j = -2\mu_{j+\frac{1}{2}} \omega_{j+\frac{1}{2}} \quad , \quad 0 \le j \le J-1 ,$$

$$(2.22) \quad \omega_{j+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) u_R(r,\mu) \right) (r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) = \beta_{j+1} u_R(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+1}) - \beta_j u_R(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_j) ,$$

pour $0 \le j \le J-1$, $0 \le i \le I-1$.

Si le poids $\omega_{j+\frac{1}{2}}$ de la formule de quadrature (2.9) diffère peu de la longueur $\mu_{j+1} - \mu_j$ de l'intervalle $[\mu_j, \mu_{j+1}]$, alors le terme β_j apparaît comme une approximation de $1 - \mu_j^2$.

Remarque 2.3 : La relation (2.16) permet de déterminer la valeur $\mu_{J-\frac{1}{2}}$. Pour déterminer les valeurs de $\mu_{j+\frac{1}{2}}$, $0 \leq j \leq J-2$, et des poids $\omega_{j+\frac{1}{2}}$, $0 \leq j \leq J-1$, on dispose d'un système de $J-1$ équations (les relations (2.15)). Pour calculer les $\mu_{j+\frac{1}{2}}$ et $\omega_{j+\frac{1}{2}}$, il est nécessaire de s'imposer J relations supplémentaires.

Lemme 2.2 : On suppose que les relations (2.15) et (2.16) sont satisfaites. Une condition suffisante pour que la propriété de conservation 2 soit vérifiée de façon discrète est que les relations suivantes soient satisfaites :

$$r_{i+1}^2 - r_i^2 = 2\, w_{i+\frac{1}{2}}\, r_{i+\frac{1}{2}} \quad , \quad 0 \leq i \leq I-1 \, , \tag{2.23}$$

$$r_{i+1}^3 - r_i^3 = 3\, w_{i+\frac{1}{2}}\, r_{i+\frac{1}{2}}^2 \quad , \quad 0 \leq i \leq I-1 \, . \tag{2.24}$$

Démonstration : En sommant les égalités telles que (2.19), pour tous les indices i compris entre M et N, pour $0 \leq M \leq N \leq I-1$, on a :

$$\sum_{i=M}^{N} w_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 m_{1,k} \right) \right) (r_{i+\frac{1}{2}}) + \sigma \sum_{i=M}^{N} w_{i+\frac{1}{2}}\, r_{i+\frac{1}{2}}^2\, m_{0,k}(r_{i+\frac{1}{2}}) = \tag{2.25}$$

$$= \sum_{i=M}^{N} \sum_{j=-J}^{J-1} w_{i+\frac{1}{2}}\, \omega_{j+\frac{1}{2}}\, r_{i+\frac{1}{2}}^2\, S(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \, .$$

Une relation de conservation, analogue discret de la relation (1.5) peut s'écrire, pour tous les entiers M et N tels que $0 \leq M \leq N \leq I-1$:

$$r_{N+1}^2\, m_{1,k}(r_{N+1}) - r_M^2\, m_{1,k}(r_M) + \sigma \sum_{i=M}^{N} w_{i+\frac{1}{2}}\, r_{i+\frac{1}{2}}^2\, m_{0,k}(r_{i+\frac{1}{2}}) = \tag{2.26}$$

$$= \sum_{i=M}^{N} \sum_{j=-J}^{J-1} w_{i+\frac{1}{2}}\, \omega_{j+\frac{1}{2}}\, r_{i+\frac{1}{2}}^2\, S(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \, .$$

En comparant les deux dernières égalités, on obtient :

$$r_{N+1}^2\, m_{1,k}(r_{N+1}) - r_M^2\, m_{1,k}(r_M) = \sum_{i=M}^{N} w_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 m_{1,k} \right) \right) (r_{i+\frac{1}{2}}) \, . \tag{2.27}$$

Puisque la fonction u_k appartient à l'espace V_k, les fonctions $m_{\ell,k}(r)$, $\ell \geq 0$, sont continues, linéaires sur chaque intervalle $[r_i, r_{i+1}]$ et sont déterminées de façon unique par leurs valeurs $m_{\ell,i} = m_{\ell,k}(r_i)$ aux abscisses r_i, $0 \leq i \leq I$. En choisissant $N = M$ dans l'égalité (2.27), et en remplaçant successivement la fonction $m_{1,k}(r)$ par 1 et par r, on en déduit les conditions (2.23) et (2.24). En éliminant $w_{i+\frac{1}{2}}$ entre les relations (2.23) et (2.24), il vient :

Proposition 2.1 : On a, pour $0 \leq i \leq I-1$

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i+1}) + \frac{1}{6}\frac{(r_{i+1}-r_i)^2}{r_{i+1}+r_i} = \frac{2}{3}\frac{r_{i+1}^2 + r_i r_{i+1} + r_i^2}{r_{i+1}+r_i} \quad .$$

Remarque 2.4 : Les relations (2.23) et (2.24) ne sont pas autre chose que les conditions de conservation dérivées en utilisant des techniques de différences finies par REED et LATHROP [44].

Des Lemmes 2.1 et 2.2 et de la Remarque 2.2, on déduit le

Lemme 2.3 : On suppose que les relations (2.15), (2.16), (2.23) et (2.24) sont satisfaites. Alors les équations (2.13) peuvent s'écrire :

$$(2.28)\quad \omega_{j+\frac{1}{2}}\mu_{j+\frac{1}{2}}\left(r_{i+1}^2 u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - r_i^2 u_{i,j+\frac{1}{2}}\right) + w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}}\left(\beta_{j+1} u_{i+\frac{1}{2},j+1} - \beta_j u_{i+\frac{1}{2},j}\right) +$$

$$+ \omega_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}}^2 \left(\tau u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right) = 0 \ ,$$

pour $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq J-1$, où les quantités β_j, $\omega_{j+\frac{1}{2}}$ et $\mu_{j+\frac{1}{2}}$ (resp. $r_{i+\frac{1}{2}}$ et $w_{i+\frac{1}{2}}$) satisfont les relations (2.15), (2.16), (2.21) (resp. (2.23) et (2.24)).

Démonstration : Multiplions l'égalité (2.13) par $w_{i+\frac{1}{2}}\omega_{j+\frac{1}{2}}$. On a :

$$(2.29)\quad w_{i+\frac{1}{2}}\omega_{j+\frac{1}{2}}\left(\mu_{j+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_k\right) + r_{i+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)u_k\right) + r_{i+\frac{1}{2}}^2\left(\tau u_k - S\right)\right)\left(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) = 0$$

La fonction u_k étant linéaire en r sur $[r_i, r_{i+1}]$, on peut écrire, d'après le Lemme 2.2 :

$$(2.30)\quad w_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_k\right)\right)\left(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}\right) = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_k(r, \mu_{j+\frac{1}{2}})\right) dr =$$

$$= r_{i+1}^2 u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - r_i^2 u_{i,j+\frac{1}{2}} \quad .$$

L'égalité (2.28) est alors une conséquence des relations (2.22), (2.29) et (2.30).
Puisque la dimension de l'espace V_h est égale à $2IJ + 2J + I$, les $2IJ$ relations (2.28) et les J conditions aux limites

$$u_{I,j+\frac{1}{2}} = 0 \quad , \quad -J \leq j \leq -1 \quad , \tag{2.31}$$

ne suffisent pas à déterminer la solution $u_h \in V_h$
Pour calculer la solution u_h en suivant le cheminement décrit au paragraphe 1, il faut d'abord déterminer les valeurs $u_{i+\frac{1}{2},-J}$, $0 \leq i \leq I-1$. Pour cela, on considère l'équation (1.3) écrite de façon formelle pour $\mu = -1$
On obtient l'équation différentielle (suivant la caractéristique).

$$-r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \sigma r^2 \varphi = r^2 S \quad , \tag{2.32}$$

avec la condition aux limites

$$\varphi(R) = 0 \quad . \tag{2.33}$$

Soit $\mathcal{V}_h$ l'espace des fonctions continues sur $[0,R]$, linéaires sur chaque intervalle $[r_i, r_{i+1}]$. Les fonctions ψ_h de $\mathcal{V}_h$ sont déterminées de façon unique par leur valeur ψ_i aux points r_i , $0 \leq i \leq I$. On définit une solution $\varphi_h \in \mathcal{V}_h$ approchant la solution u du problème (2.32) de la façon suivante : Trouver $\varphi_h \in \mathcal{V}_h$ tel que :

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(-r^2 \frac{\partial \varphi_h}{\partial r} + \sigma r^2 \varphi_h - r^2 S \right) dr = 0 \quad , \quad I-1 \geq i \geq 0, \tag{2.34}$$

$$\varphi_h(r_i) \equiv \varphi_I = 0 \quad , \tag{2.35}$$

les intégrales sur les segments $[r_i, r_{i+1}]$ étant calculés en utilisant la formule (2.10).

Grâce aux relations (2.23) et (2.24), les équations (2.34) s'écrivent :

$$- w_{i+\frac{1}{2}} r^2_{i+\frac{1}{2}} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{r_{i+1} - r_i} + w_{i+\frac{1}{2}} r^2_{i+\frac{1}{2}} \left(\sigma \varphi_{i+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{2}} \right) = 0 \quad , \tag{2.36}$$

ou encore

$$r_i^2 \varphi_i - r_{i+1}^2 \varphi_{i+1} + 2 w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}} \varphi_{i+\frac{1}{2}} + w_{i+\frac{1}{2}} r^2_{i+\frac{1}{2}} \left(\sigma \varphi_{i+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{2}} \right) = 0 \tag{2.37}$$

où :

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}} = \varphi_R(r_{i+\frac{1}{2}}) = \theta_{i+\frac{1}{2}}\varphi_{i+1} + (1-\theta_{i+\frac{1}{2}})\varphi_i \quad ,$$

$$S_{i+\frac{1}{2}} = S(r_{i+\frac{1}{2}}, -1) \quad ,$$

pour $I-1 \geq i \geq 0$.

Les équations (2.28), pour $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq -1$
les équations (2.36), (2.37), pour $0 \leq i \leq I-1$ et les conditions aux limites (2.31) permettent de déterminer la solution u_R dans le domaine $[0,R] \times [-1, 0]$, si on pose :

(2.38) $$u_{i+\frac{1}{2}, -J} = \varphi_{i+\frac{1}{2}} \quad , \quad 0 \leq i \leq I-1 \quad .$$

On connaît donc les valeurs de u_R le long de l'axe des r , pour $0 \leq r \leq R$ et en particulier les $u_{i+\frac{1}{2}, 0}$, $0 \leq i \leq I-1$. Pour poursuivre les calculs en suivant le cheminement décrit au paragraphe 1, il est nécessaire de connaître les valeurs de u_R aux points de coordonnées $(0, \mu_{j+\frac{1}{2}})$, $0 \leq j \leq J-1$. Pour cela, on utilise la relation de symétrie (1.8), et on écrit :

(2.39) $$u_{0, j+\frac{1}{2}} = u_{0, -j-\frac{1}{2}} \quad , \quad 0 \leq j \leq J-1 \quad .$$

En résumé, pour calculer la solution approchée $u_R \in V_R$, on procède de la façon suivante :

Schéma IV. La solution $u_R \in V_R$, approchant la solution u du problème (1.1), (1.2) est déterminée par la résolution des équations :

(2.40) $$r_i^2 \varphi_i - r_{i+1}^2 \varphi_{i+1} + 2 w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}} \varphi_{i+\frac{1}{2}} + w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}}^2 (\sigma \varphi_{i+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{2}}) = 0$$

pour $I-1 \geq i \geq 0$,

(2.41) $$\varphi_I = 0 \quad ,$$

(2.42) $$u_{i+\frac{1}{2}, -J} = \varphi_{i+\frac{1}{2}} = \theta_{i+\frac{1}{2}} \varphi_{i+1} + (1-\theta_{i+\frac{1}{2}})\varphi_i \quad , \quad 0 \leq i \leq I-1 \quad ,$$

(2.43) $$\omega_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} (r_{i+1}^2 u_{i+1, j+\frac{1}{2}} - r_i^2 u_{i, j+\frac{1}{2}}) + w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}} (\beta_{j+1} u_{i+\frac{1}{2}, j+1} - \beta_j u_{i+\frac{1}{2}, j}) +$$
$$+ \omega_{j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}}^2 (\sigma u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}) = 0$$

pour $0 \le i \le I-1$, $-J \le j \le J-1$,

(2.44) $u_{0,j+\frac{1}{2}} = u_{0,-j-\frac{1}{2}}$, $0 \le j \le J-1$,

les quantités β_j , $\omega_{j+\frac{1}{2}}$ et $\mu_{j+\frac{1}{2}}$ (resp. $\tau_{i+\frac{1}{2}}$ et $w_{i+\frac{1}{2}}$) satisfaisant les relations (2.15), (2.16) et (2.21) (resp. (2.23) et (2.24)). Les calculs sont effectués rectangle par rectangle en suivant le cheminement décrit au paragraphe 1.

Comme on l'a vu à la Remarque 2.3, il est nécessaire de s'imposer J relations supplémentaires pour déterminer les $\mu_{j+\frac{1}{2}}$ et $\omega_{j+\frac{1}{2}}$.

Un premier choix pour ces relations consiste à écrire que le poids $\omega_{j+\frac{1}{2}}$ de la formule de quadrature (2.9) est égal à la longueur de l'intervalle $[\mu_j, \mu_{j+1}]$

(2.45) $\omega_{j+\frac{1}{2}} = \mu_{j+1} - \mu_j$, $0 \le j \le J-1$.

On obtient alors les relations :

(2.46) $1 + 2\mu_{j+1}\mu_{j+\frac{1}{2}} - 3\mu_{j+\frac{1}{2}}^2 = 1 + 2\mu_{j-1}\mu_{j-\frac{1}{2}} - 3\mu_{j-\frac{1}{2}}^2 = \beta_j$, $1 \le j \le J-1$,

(2.47) $1 + 2\mu_{J-1}\mu_{J-\frac{1}{2}} - 3\mu_{J-\frac{1}{2}}^2 = \beta_J = 0$

On retrouve les relations dérivées par [44] et étudiées dans [20]. Ces relations doivent permettre de déterminer les $\mu_{j-\frac{1}{2}}$ et β_{j-1} , par récurrence, en partant de $j = J-1$ et en faisant décroître l'indice j , grâce aux formules :

(2.48) $\mu_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(\mu_{j-1} + \left(\mu_{j-1}^2 + 3(1-\beta_j)\right)^{\frac{1}{2}}\right)$,

(2.49) $\beta_{j-1} = 1 + 2\mu_j\mu_{j-\frac{1}{2}} - 3\mu_{j-\frac{1}{2}}^2$.

Puisque $\beta_J = 0$, on peut calculer $\mu_{J-\frac{1}{2}}$, et on vérifie que l'on a $2\mu_{J-\frac{1}{2}} > \mu_J + \mu_{J-1}$. Il faut maintenant montrer qu'il est possible de poursuivre les calculs jusqu'à l'indice $j = 1$; c'est ce qui fait l'objet du Lemme suivant, dont la démonstration, assez technique, peut être consultée dans [20, Annexe A, pages 126-130] :

Lemme 2.4 : On suppose que :

$$(2.50)\qquad \mu_{j+1}-\mu_j \leqslant \mu_j-\mu_{j-1} \qquad \text{pour} \qquad J-1\geqslant j\geqslant 1$$

Alors on peut déterminer β_j et $\mu_{j+\frac{1}{2}}$, $J-1\geqslant j\geqslant 0$, satisfaisant les relations (2.29) et (2.30) et on a les inégalités :

$$(2.51)\qquad \tfrac{1}{2}(\mu_j+\mu_{j+1})<\mu_{j+\frac{1}{2}}<\mu_{j+1} \quad , \quad 0\leqslant j\leqslant J-1 \ ,$$

$$(2.52)\qquad 1-\mu_j^2<\beta_j<1 \quad , \quad 0\leqslant j\leqslant J-1 \ ,$$

$$(2.53)\qquad \beta_{j+1}<\beta_j \quad , \quad 0\leqslant j\leqslant J-1 \ .$$

Remarque 2.5 : L'hypothèse (2.31) n'est pas très restrictive, car dans la pratique, on choisit souvent les μ_j équirépartis :

$$(2.54)\qquad \mu_{j+1}-\mu_j=\Delta\mu=\frac{1}{J} \quad , \quad 0\leqslant j\leqslant J-1$$

Dans ce cas, on a le résultat suivant, démontré dans [20, pages 130-133].

Lemme 2.5 : On suppose que l'égalité (2.35) est satisfaite, pour $0\leqslant j\leqslant J-1$. Alors on a :

$$(2.55)\qquad 0<\mu_{j+\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}(\mu_j+\mu_{j+1})<C\frac{\Delta\mu^2}{\sqrt{\mu_{j+1}}} \ .$$

On a donc le

Schéma IV.1 : La solution $u_h\in V_h$, approchant la solution u du problème (1.1), (1.2) est calculée en résolvant les équations (2.40) à (2.44) (Schéma IV), les quantités β_j , $\omega_{j+\frac{1}{2}}$ et $\mu_{j+\frac{1}{2}}$ (resp. $r_{i+\frac{1}{2}}$ et $w_{i+\frac{1}{2}}$) étant déterminées par les relations (2.45), (2.48) et (2.49)(resp. (2.23) et (2.24)).

Un second choix consiste à écrire que l'on a :

$$(2.56)\qquad \beta_j=1-\mu_j^2 \quad , \quad 0\leqslant j\leqslant J \ .$$

On obtient alors les relations :

$$(2.57)\qquad 3\mu_{j+\frac{1}{2}}^2(\mu_j^2-\mu_{j+1}^2)+2\mu_{j+\frac{1}{2}}(\mu_j-\mu_{j+1}-\mu_j^3+\mu_{j+1}^3)+\mu_{j+1}^2-\mu_j^2=0$$

pour $0 \leq j \leq J-1$, les $\omega_{j+\frac{1}{2}}$ étant déterminés par les relations (2.15).

On peut montrer que dans ce cas (RAVIART, communication personnelle) la formule de quadrature (2.9) est exacte, sur chaque segment $[\mu_j, \mu_{j+1}]$, $0 \leq j \leq J-1$ pour les polynômes μ et $1-3\mu^2$.
En étudiant la concavité de la fonction $\mu \longrightarrow \frac{1-3\mu^2}{\mu}$, on obtient le résultat suivant :

Lemme 2.6 : On suppose que l'égalité (2.37) est satisfaite, pour $0 \leq j \leq J-1$. Alors on a, pour $0 \leq j \leq J-1$:

$$(2.58) \qquad 0 < \mu_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\mu_{j+1}+\mu_j) < c\,\mu_{j+\frac{1}{2}}(\mu_{j+1}-\mu_j)^2 \quad .$$

On a donc le

Schéma IV.2 : La solution $u_R \in V_R$, approchant la solution u du problème (1.1), (1.2) est calculée en résolvant les équations (2.40) à (2.44) (Schéma IV), les quantités β_j , $\omega_{j+\frac{1}{2}}$ et $\mu_{j+\frac{1}{2}}$ (resp. $r_{i+\frac{1}{2}}$ et $w_{i+\frac{1}{2}}$) étant déterminées par les relations (2.15), (2.56) et (2.57)(resp. (2.23) et (2.24)).

IV.3 - Méthodes continues pour résoudre le problème (1.1),(1.2) : Stabilité et convergence.

Dans ce paragraphe, on étudie la stabilité et la convergence des schémas IV.1 et IV.2 pour différentes normes avec poids $\| \cdot \|_{\gamma,\delta,R}$, équivalents discrets des normes $\| \cdot \|_{\gamma,\delta}$ définies par :

$$(3.1) \qquad \|v\|_{\gamma,\delta} = \left(\int_{-1}^{+1} \int_{0}^{R} r^{\gamma} (1-\mu^2)^{-\delta} v^2 \, dr \, d\mu \right)^{1/2} ,$$

pour $0 \leq \gamma \leq 2$, $0 \leq \delta \leq 1$.

On obtient en particulier les résultats suivants :

$$\|u - u_R\|_{2/3,0,R} \leq C R^{11/6} (|\mathrm{Log}\, R|)^{1/2} \|u\|_{3,\infty,\Omega} ,$$

$$\|u - u_R\|_{2,0,R} \leq C R^{11/6} (|\mathrm{Log}\, R|)^{1/2} \|u\|_{3,\infty,\Omega} ,$$

$$\|u - u_R\|_{0,0,R} \leq C R^{3/2} (|\mathrm{Log}\, R|)^{1/2} \|u\|_{3,\infty,\Omega} ,$$

$$\left(\sum_{j=-J}^{J-1} (\omega|\mu|)_{j+\frac{1}{2}} \left(u_{0,j+\frac{1}{2}} - u(0,\mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 \right)^{1/2} \leq C R^{3/2} (|\mathrm{Log}\, R|)^{1/2} \|u\|_{3,\infty,\Omega} .$$

où C est une constante > 0 indépendante de R .

On commence par étudier l'équation différentielle (2.32), discrétisée sous la forme (2.36), (2.37). On considère ensuite les relations (2.43), pour $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq -1$, puis pour $0 \leq i \leq I-1$, $0 \leq j \leq J-1$.

Pour $0 \leq r < R$, $-1 < \mu \leq 0$ (resp. $0 < \mu \leq +1$), on pose

$$\Omega^-_{r,\mu} = \{ (r',\mu') \in \Omega \, ; \, r < r' < R \, , \, -1 < \mu' < \mu \} ,$$

resp. $$\Omega^+_{r,\mu} = \{ (r',\mu') \in \Omega \, ; \, 0 < r' < r \, , \, 0 < \mu' < \mu \} .$$

Pour $0 < r \leq R$, $0 < \mu \leq +1$, on pose (figure 3.1) :

$$\Omega_{r,\mu} = \Omega^-_{0,0} \cup \Omega^+_{r,\mu} .$$

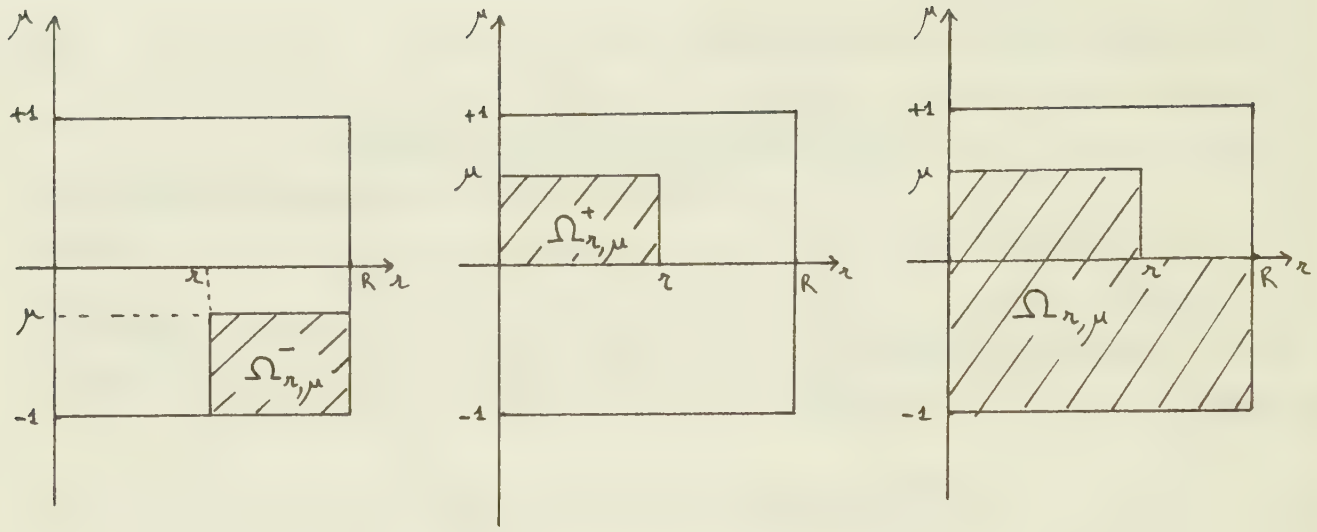


Figure 3.1

On définit les normes discrètes suivantes, pour toute fonction v continue sur chaque rectangle :

$$(3.2)\quad \|v\|^-_{\gamma,\delta,h} = \left(\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^{-1} w_{i+\frac12} w_{j+\frac12} r^{\gamma}_{i+\frac12} \left(1-\mu^2_{j+\frac12}\right)^{-\delta} v^2_{i+\frac12,j+\frac12} \right)^{1/2},$$

$$(3.3)\quad \|v\|^+_{\gamma,\delta,h} = \left(\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} w_{i+\frac12} w_{j+\frac12} r^{\gamma}_{i+\frac12} \left(1-\mu^2_{j+\frac12}\right)^{-\delta} v^2_{i+\frac12,j+\frac12} \right)^{1/2},$$

$$(3.4)\quad \|v\|_{\gamma,\delta,h} = \left(\left(\|v\|^+_{\gamma,\delta,h}\right)^2 + \left(\|v\|^-_{\gamma,\delta,h}\right)^2 \right)^{1/2}.$$

Pour toute fonction v définie et continue sur $[0,R]$, on définit

$$(3.5)\quad |v|_{\gamma,h} = \left(\sum_{i=0}^{I-1} w_{i+\frac12} r^{\gamma}_{i+\frac12} v^2_{i+\frac12} \right)^{1/2},$$

analogue discret de la norme avec poids

$$(3.6)\quad |v|_{\gamma} = \left(\int_0^R r^{\gamma} v^2 \, dr \right)^{1/2}$$

On pose :

$$(3.7)\quad a_{i+\frac12} = \theta_{i+\frac12} r^2_i + \left(1-\theta_{i+\frac12}\right) r^2_{i+1}.$$

Lemme 3.1 : Pour tout couple ψ_i , ψ_{i+1} satisfaisant la relation (2.40), pour $0 \leq i \leq I-1$, on a :

$$(3.8)\quad \left(\frac{3}{2} - 2\theta_{i+\frac{1}{2}}\right)\psi_i^2 - \left(2\theta_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right)\psi_{i+1}^2 + \sigma w_{i+\frac{1}{2}} \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2}{a_{i+\frac{1}{2}}} \psi_{i+\frac{1}{2}}^2 \leq$$

$$\leq w_{i+\frac{1}{2}} \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2}{a_{i+\frac{1}{2}}} S_{i+\frac{1}{2}} \psi_{i+\frac{1}{2}} \quad ,$$

où $\psi_{i+\frac{1}{2}} = \theta_{i+\frac{1}{2}} \psi_{i+1} + (1-\theta_{i+\frac{1}{2}})\psi_i$.

Démonstration : On multiplie l'égalité (2.40) par $\psi_{i+\frac{1}{2}}$. Il vient, en remplaçant $\psi_{i+\frac{1}{2}}$ par sa valeur :

$$\psi_i^2 \left((1-\theta) r_i^2 + 2(1-\theta)^2 r_{i+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{2}} \right) - \psi_{i+1}^2 \left(\theta r_{i+1}^2 - 2\theta^2 r_{i+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{2}} \right) +$$

$$+ \psi_i \psi_{i+1} \left(\theta r_i^2 - (1-\theta) r_{i+1}^2 + 2\theta(1-\theta) w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}} \right) +$$

$$+ w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}}^2 \left(\sigma \psi_{i+\frac{1}{2}}^2 - S_{i+\frac{1}{2}} \psi_{i+\frac{1}{2}} \right) = 0$$

Le coefficient de $\psi_i \psi_{i+1}$ peut encore s'écrire, d'après (2.23) :

$$\theta r_i^2 - (1-\theta) r_{i+1}^2 + 2\theta(1-\theta) w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}} = (2\theta-1)\left(\theta r_i^2 + (1-\theta) r_{i+1}^2\right) ,$$

et il est > 0 car :

$$(3.9)\quad \theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}} - r_i}{r_{i+1} + r_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} + r_i} \quad .$$

On minore le terme $(2\theta-1)\left(\theta r_i^2 + (1-\theta) r_{i+1}^2\right) \psi_i \psi_{i+1}$ par

$$-\frac{1}{2}(2\theta-1)\left(\theta r_i^2 + (1-\theta) r_{i+1}^2\right)\left(\psi_i^2 + \psi_{i+1}^2\right)$$

On en déduit l'inégalité :

$$\left(\frac{3}{2} - 2\theta\right) a_{i+\frac{1}{2}} \psi_i^2 - \left(2\theta - \frac{1}{2}\right) a_{i+\frac{1}{2}} \psi_{i+1}^2 + w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}}^2 \left(\sigma \psi_{i+\frac{1}{2}}^2 - S_{i+\frac{1}{2}} \psi_{i+\frac{1}{2}}\right) = 0$$

En divisant par $a_{i+\frac{1}{2}}$ et en remplaçant θ par $\theta_{i+\frac{1}{2}}$, on obtient (3.8).

Lemme 3.2 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $0 \le i \le I-1$. On a :

$$(3.10)\quad \prod_{i=1}^{I-1} \frac{2\theta_{i+\frac12} - \frac12}{\frac32 - 2\theta_{i+\frac12}} \left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^{\gamma} \le \begin{cases} C & \text{si } \gamma \ge \frac23 \\ C\,\Delta r^{\gamma - \frac23} & \text{si } \gamma < \frac23 \end{cases},$$

où C est une constante indépendante de Δr

Démonstration : On a $r_i = i\,\Delta r$, et d'après (3.9), il vient :

$$\rho_i = \frac{2\theta_{i+\frac12} - \frac12}{\frac32 - 2\theta_{i+\frac12}} \left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^{\gamma} = \frac{5r_{i+1} + r_i}{r_{i+1} + 5r_i} \left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^{\gamma} = \frac{6i+5}{6i+1} \left(\frac{i}{i+1}\right)^{\gamma}$$

En développant suivant les puissances de $\frac{1}{i}$, il vient :

$$\rho_i = 1 + \left(\frac23 - \gamma\right)\frac{1}{i} + O\left(\frac{1}{i^2}\right)$$

Mais, d'après un résultat classique sur les séries

$$\lim_{I\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{i} - \operatorname{Log} I \right) = \mathcal{C}$$

où $\mathcal{C}$ désigne la constante d'Euler

Si on a $\gamma \ne \frac23$, on peut donc écrire :

$$(3.11)\quad \prod_{i=1}^{I-1} \rho_i \le C\, I^{\gamma - \frac23}$$

Si $\gamma = \frac23$, la série $\sum_{i=1}^{I} \operatorname{Log} \rho_i$ converge, d'où

$$(3.12)\quad \prod_{i=1}^{I-1} \rho_i \le C$$

Les inégalités (3.11) et (3.12) entraînent l'inégalité (3.10).

Des Lemmes 3.1 et 3.2, on déduit le

Lemme 3.3 : Le schéma (2.40), (2.41) est stable pour les normes $|\cdot|_{\gamma,h}$ avec $\gamma \ge \frac23$, c'est-à-dire : soit $\varphi_h \in \mathcal{Y}_h$ la solution du problème (2.40), (2.41), on a les majorations :

$$(3.13)\quad \max_{1\le i\le I-1} r_i^{\gamma}\varphi_i^2 + |\varphi_R|^2_{\gamma,R} \le \begin{cases} c\,|S|^2_{\gamma,R} & \text{si } \gamma \ge \frac{2}{3}\ , \\ c\,\Delta r^{2\gamma-\frac{4}{3}}\,|S|^2_{\gamma,R} & \text{si } \gamma < \frac{2}{3}\ , \end{cases}$$

où C est une constante >0 indépendante de Δr

Démonstration : On remplace ψ_i par φ_i dans la relation (3.8), et on multiplie par $(a_{i+\frac12})^{\gamma/2}$. On a :

$$\frac{(a_{i+\frac12})^{\frac{\gamma}{2}}}{r_i^{\gamma}}\left(\frac32 - 2\theta_{i+\frac12}\right) r_i^{\gamma}\varphi_i^2 - \frac{(a_{i+\frac12})^{\frac{\gamma}{2}}}{r_{i+1}^{\gamma}}\left(2\theta_{i+\frac12}-\frac12\right) r_{i+1}^{\gamma}\varphi_{i+1}^2 +$$

$$+ w_{i+\frac12}\frac{r_{i+\frac12}^2}{(a_{i+\frac12})^{1-\frac{\gamma}{2}}}\left(\tau\,\psi^2_{i+\frac12} - S_{i+\frac12}\psi_{i+\frac12}\right) \le 0 \quad .$$

D'autre part, il est aisé de montrer, en utilisant les définitions de $a_{i+\frac12}$ et $r_{i+\frac12}$, qu'il existe deux constantes >0 , c et C , indépendantes de Δr telles que, pour $1\le i\le I-1$,

$$(3.14)\quad c \le \frac{a_{i+\frac12}}{(r_{i+\frac12})^2} \le C\ ,\quad c \le \frac{a_{i+\frac12}}{r_i^2} \le C\ ,\quad c \le \frac{a_{i+\frac12}}{r_{i+1}^2} \le C \quad .$$

Enfin, on a les inégalités :

$$(3.15)\quad \frac12 \le \theta_{i+\frac12} \le \frac23\ ,\qquad 0\le i\le I-1\ .$$

En sommant sur tous les indices i , $0\le i\le I-1$ et en utilisant les inégalités (3.14) et (3.15) et le Lemme 3.2, on obtient la majoration (3.13).

Remarque 3.1 : La majoration (3.13) pour $\gamma<\frac23$ constitue un résultat de stabilité faible.

Définition 3.1 : Soit v une fonction continue sur $[0,R]$. Sa fonction $\mathcal{V}_R$ interpolée est l'unique fonction $\tilde v \in \mathcal{V}_R$ égale à v aux abscisses r_i, $0\le i\le I$.

Lemme 3.4 : Soit une fonction $v\in H^3(0,R)$, on a :

$$(3.16)\quad \left|(v-\tilde v)(r_{i+\frac12})\right| \le c\,\Delta r^{3/2}\,|v|_{2,2,(r_i,r_{i+1})}\ ,$$

$$(3.17)\quad \left|\frac{\partial}{\partial r}(v-\tilde v)(r_{i+\frac12})\right| \le c\left(\frac{\Delta r^{3/2}}{r_i+r_{i+1}}|v|_{2,2,(r_i,r_{i+1})} + \Delta r^{3/2}|v|_{3,2,(r_i,r_{i+1})}\right),$$

pour $0 \leq i \leq I-1$; où C est une constante > 0 indépendante de Δr

Démonstration : Soit $\hat{H} = [-1,+1]$ l'intervalle de référence et $F_{H_i} \in P_1$ la transformation qui envoie l'intervalle $\hat{H}$ sur l'intervalle $H_i = [r_i, r_{i+1}]$. On a :

$$r_{i+\frac{1}{2}} = F_{H_i}(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}) \quad , \text{ avec}$$

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}} = 2\theta_{i+\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{3}\,\frac{r_{i+1}-r_i}{r_{i+1}+r_i} \quad .$$

A la fonction v, on associe $\hat{v} = v \circ F_{H_i}$. On a :

$$(v-\tilde{v})(r_{i+\frac{1}{2}}) = (\hat{v}-\tilde{\hat{v}})(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}) \quad .$$

L'application linéaire $\hat{v} \longrightarrow (\hat{v}-\tilde{\hat{v}})(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}})$ est continue de $H^2(-1,+1)$ dans $\mathbb{R}$, et est identiquement nulle pour tout $\hat{v} \in P_1$. D'après le Lemme 0.3, on a donc :

$$\left|(v-\tilde{v})(r_{i+\frac{1}{2}})\right| = \left|(\hat{v}-\tilde{\hat{v}})(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}})\right| \leq C\,|\hat{v}|_{2,2,\hat{H}} \quad .$$

D'après le Lemme 0.8, on a :

$$(3.18) \qquad |\hat{v}|_{k,2,\hat{H}} \leq C\,\Delta r^{k-\frac{1}{2}}\,|v|_{k,2,H_i} \quad , \text{ pour } k = 2,3 \quad .$$

Des deux dernières inégalités, on déduit la majoration (3.16). On a :

$$\frac{\partial}{\partial r}(v-\tilde{v})(r_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{2}{\Delta r}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v}-\tilde{\hat{v}})\right)(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}) \quad .$$

L'application linéaire $\hat{v} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v}-\tilde{\hat{v}})(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}})$ est continue de $H^3(\hat{H})$ dans $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $\hat{v} \in P_2$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v}-\tilde{\hat{v}})(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}})\right| \leq C\,\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\,|\hat{v}|_{2,2,\hat{H}} \quad .$$

D'après le Lemme 0.4, on a donc, pour tout $\hat{v} \in H^3(\hat{H})$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{v}-\tilde{\hat{v}})(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}})\right| \leq C\left(\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}\,|\hat{v}|_{2,2,\hat{H}} + (1+\varepsilon_{i+\frac{1}{2}})\,|\hat{v}|_{3,2,\hat{H}}\right) .$$

En combinant la dernière inégalité et l'inégalité (3.18), on obtient la majoration (3.17).

En utilisant les Lemmes 3.3 et 3.4, on montre les majorations d'erreur suivantes :

Théorème 3.1 : Soit $\varphi \in H^3(0,R)$ la solution du problème (2.32) et (2.33). On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r$, $0 \le i \le I-1$.
On a alors :

$$(3.19)\quad \max_{0\le i\le I-1} r_i^{\gamma/2} |\varphi_i - \varphi(r_i)| + |\varphi - \varphi_R|_{\gamma,R} \le C\left(|\varphi|_{2,\infty,(0R)} + |\varphi|_{3,2,(0R)}\right) \begin{cases} \Delta r^2 , & 1 < \gamma \le 2 \\ \Delta r^2 |\mathrm{Log}\,\Delta r|^{1/2} , & \gamma = 1 \\ \Delta r^{\frac{3+\gamma}{2}} , & \frac{2}{3} \le \gamma < 1 \\ \Delta r^{\frac{5+9\gamma}{6}} , & 0 \le \gamma < \frac{2}{3} \end{cases}$$

où C est une constante > 0 indépendante de Δr .

Démonstration : La relation (2.40) peut s'écrire :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varphi_R) + 2r\varphi_R + r^2(\sigma\varphi_R - S)\right)(r_{i+\frac12}) = 0 \quad .$$

Soit $\tilde\varphi$ l'interpolée de φ , la fonction $\varphi_R - \tilde\varphi$ vérifie l'équation

$$(3.20)\quad \left(-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2(\varphi_R - \tilde\varphi)\right) + 2r(\varphi_R - \tilde\varphi) + r^2\left(\sigma(\varphi_R - \tilde\varphi) - S'\right)\right)(r_{i+\frac12}) = 0,$$

où le second membre S' s'écrit :

$$S'(r) = \frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2(\varphi - \tilde\varphi)\right) + 2r(\varphi - \tilde\varphi) + \sigma r^2(\varphi - \tilde\varphi)\right) = -\frac{\partial}{\partial r}(\varphi - \tilde\varphi) + \sigma(\varphi - \tilde\varphi).$$

En utilisant le Lemme 3.4, on a :

$$|S'(r_{i+\frac12})| \le C\left(\frac{\Delta r^{3/2}}{r_i + r_{i+1}} |\varphi|_{2,2,H_i} + \Delta r^{3/2} |\varphi|_{3,2,H_i}\right) \quad .$$

On en déduit que :

$$(3.21)\quad |S'|^2_{\gamma,R} \le C\left(\Delta r^3 \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(wr^\gamma)_{i+\frac12}}{(r_i + r_{i+1})^2} |\varphi|^2_{2,2,H_i} + \Delta r^3 \sum_{i=0}^{I-1} (wr^\gamma)_{i+\frac12} |\varphi|^2_{3,2,H_i}\right).$$

Le premier terme du membre de droite se majore par :

$$(3.22)\quad \Delta r^3 \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(wr^\gamma)_{i+\frac12}}{(r_i + r_{i+1})^2} |\varphi|^2_{2,2,H_i} \le C\Delta r^4 |\varphi|^2_{2,\infty,(0,R)} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{\Delta r\, r_{i+\frac12}^{\gamma}}{(r_i + r_{i+1})^2} \quad ,$$

$$(3.23)\quad \sum_{i=0}^{I-1} \frac{\Delta r\, r_{i+\frac{1}{2}}^{\gamma}}{(r_i+r_{i+1})^2} \leq \begin{cases} C & \text{si} \quad 1 < \gamma \leq 2 \ , \\ C\,|\mathrm{Log}\,\Delta r| & \text{si} \quad \gamma = 1 \ , \\ C\,\Delta r^{\gamma-1} & \text{si} \quad 0 \leq \gamma < 1 \ . \end{cases}$$

Le second terme du membre de droite de (3.21) sa majore par

$$\Delta r^4\, |\varphi|^2_{3,2,(0,R)} \ .$$

En combinant le Lemme 3.3 (dans lequel on remplace φ_R par $\varphi_R - \tilde{\varphi}$) avec les relations (3.20 à (3.23), on obtient :

$$(3.24)\quad \max_{0\leq i\leq I-1} r_i^{\frac{\gamma}{2}} |\varphi_i - \tilde{\varphi}(r_i)| + |\tilde{\varphi} - \varphi_R|_{\gamma,R} \leq C\left(|\varphi|_{2,\infty,(0,R)} + |\varphi|_{3,2,(0,R)}\right) \begin{cases} \Delta r^2 \ , & 1 < \gamma \leq 2 \ , \\ \Delta r^2\, |\mathrm{Log}\,\Delta r|^{1/2} \ , & \gamma = 1 \ , \\ \Delta r^{\frac{3+\gamma}{2}} \ , & \frac{2}{3} \leq \gamma < 1 \ , \\ \Delta r^{\frac{5+9\gamma}{6}} \ , & 0 \leq \gamma < \frac{2}{3} \ . \end{cases}$$

D'autre part, on a $\tilde{\varphi}(r_i) = \varphi(r_i)$,

$$|\varphi - \tilde{\varphi}|_{\gamma,R} \leq C\, \Delta r^2\, |\varphi|_{2,2,(0,R)} \ .$$

La majoration (3.19) est alors une conséquence immédiate de l'inégalité (3.24).

<u>Corollaire 3.1</u> : <u>On a la majoration</u> :

$$(3.25)\quad \max_{1\leq i\leq I} \left\{ |\varphi_i - \varphi(r_i)| \ , \ |\varphi_{i+\frac{1}{2}} - \varphi(r_{i+\frac{1}{2}})| \right\} \leq C\, \Delta r^{3/2}\, \|\varphi\|_{3,2,(0,R)} \ .$$

Le résultat suivant sera utile par la suite :

<u>Lemme 3.5</u> : <u>On suppose que les hypothèses du Théorème</u> 3.1 <u>sont satisfaites</u>. On a alors :

$$(3.26)\quad |\varphi_0 - \varphi(0)| \leq C\, \Delta r^{3/2}\, \|\varphi\|_{3,2,(0,R)} \ .$$

<u>Démonstration</u>. On a :

$$(3.27)\quad \varphi_0 - \varphi(0) = \varphi_0 - \tilde{\varphi}(0) = \frac{1}{1-\theta_{\frac{1}{2}}} \left(\varphi_{\frac{1}{2}} - \tilde{\varphi}(r_{\frac{1}{2}})\right) - \frac{\theta_{\frac{1}{2}}}{1-\theta_{\frac{1}{2}}} \left(\varphi_1 - \tilde{\varphi}(r_1)\right) \ .$$

D'après l'inégalité (3.24), on peut écrire :

$$(3.28)\quad \left|\varphi_{\frac{1}{2}} - \tilde{\varphi}(r_{\frac{1}{2}})\right| \leq C\, \Delta r^{3/2}\, \|\varphi\|_{3,2,(0,R)}$$

L'inégalité (3.26) est alors une conséquence des relations (3.15), (3.25), (3.27) et (3.28).

On considère maintenant les relations (2.43) pour $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq -1$. Pour montrer la stabilité du schéma IV pour $\mu < 0$, on ne prend tout d'abord en compte que les dérivées discrètes de $\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u)$ et $\frac{\partial}{\partial \mu}((1-\mu^2) u)$ et on essaie de se ramener au cas de l'équation différentielle étudiée précédemment. Pour cela, on pose :

$$Y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \omega_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left(r^2_{i+1} u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - r_i^2 u_{i,j+\frac{1}{2}} \right) u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} +$$

$$+ w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}} \left(\beta_{j+1} u_{i+\frac{1}{2},j+1} - \beta_j u_{i+\frac{1}{2},j} \right) u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad .$$

On a, en utilisant les égalités (2.21) et (2.23) :

$$(3.29) \quad \frac{Y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} = \omega_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} \left(\left(r^2_{i+1} u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - r_i^2 u_{i,j+\frac{1}{2}} \right) - 2 r_{i+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) +$$

$$+ w_{i+\frac{1}{2}} r_{i+\frac{1}{2}} \left(\left(\beta_{j+1} u_{i+\frac{1}{2},j+1} - \beta_j u_{i+\frac{1}{2},j} \right) + 2 \mu_{j+\frac{1}{2}} \omega_{j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) .$$

Puisque l'on a $\mu_{j+\frac{1}{2}} < 0$, le premier terme du membre de droite de la relation (3.29) peut être minoré comme dans le Lemme 3.1. Pour le second terme, on a les résultats suivants :

Lemme 3.6 : On suppose que $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta\mu$, $-J \leq j \leq -1$. On a alors

$$(3.30) \quad \left(\beta_{j+1} v_{j+1} - \beta_j v_j + 2 \mu_{j+\frac{1}{2}} \omega_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} \right) v_{j+\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq b_{j+\frac{1}{2}} \left(\left(2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) v^2_{j+1} - \left(\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}} \right) v_j^2 \right) ,$$

où $v_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} v_{j+1} + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) v_j$, et

$$(3.31) \quad b_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \beta_j + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) \beta_{j+1} .$$

Démonstration : En remplaçant $v_{j+\frac{1}{2}}$ par sa valeur, et en utilisant la relation (2.21), on a :

$$X_{j+\frac{1}{2}} \equiv \left(\beta_{j+1} v_{j+1} - \beta_j v_j + 2 \omega_{j+\frac{1}{2}} \mu_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} \right) v_{j+\frac{1}{2}} =$$

$$= b_{j+\frac{1}{2}} \left(\alpha v^2_{j+1} - (1-\alpha) v_j^2 + (1-2\alpha) v_j v_{j+1} \right) .$$

D'après les relations (2.51) et (2.58), on a, pour les schémas IV.1 et IV.2

$$(3.32)\quad \frac{1}{2} < \alpha_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\mu_j + \mu_{j+1})}{\mu_{j+1} - \mu_j} < 1 \quad , \quad \text{pour} \quad 0 \le j \le J-1 .$$

D'après l'égalité (2.2), on a donc :

$$(3.33)\quad 0 < \alpha_{j+\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad -J \le j \le -1 .$$

Les relations (2.11), (2.2) et (2.15), on peut montrer que :

$$(3.34)\quad \beta_j = \beta_{-j} \quad , \quad 0 \le j \le J .$$

Les relations (2.52) et (2.56) entraînent que pour les schémas IV.1 et IV.2, on a :

$$0 < \beta_j < 1 \quad , \quad -(J-1) \le j \ne 0 \le J-1 \quad , \quad \beta_0 > 1$$

On en déduit que

$$0 < b_{j+\frac{1}{2}} \qquad \text{pour} \qquad -J \le j \le J-1 .$$

L'expression $X_{j+\frac{1}{2}}$ peut donc être minorée par :

$$X_{j+\frac{1}{2}} \ge b_{j+\frac{1}{2}} \left(\alpha v_{j+1}^2 - (1-\alpha) v_j^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\left(v_j^2 + v_{j+1}^2\right)\right) ,$$

$$X_{j+\frac{1}{2}} \ge b_{j+\frac{1}{2}} \left(\left(2\alpha - \frac{1}{2}\right) v_{j+1}^2 - \left(\frac{3}{2} - 2\alpha\right) v_j^2 \right) ,$$

c'est-à-dire l'inégalité (3.30).

En utilisant les Lemmes 3.1 et 3.6, on a donc :

$$Y_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \ge (\omega|\mu|)_{j+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{3}{2} - 2\theta_{i+\frac{1}{2}}\right) u_{i, j+\frac{1}{2}}^2 - \left(2\theta_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) u_{i+1, j+\frac{1}{2}}^2 \right) +$$

$$+ (w r)_{i+\frac{1}{2}} b_{j+\frac{1}{2}} \left(\left(2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) u_{i+\frac{1}{2}, j+1}^2 - \left(\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}}\right) u_{i+\frac{1}{2}, j}^2 \right) .$$

Avant d'étudier la stabilité du schéma IV, on montre le résultat technique suivant, analogue au Lemme 3.2 :

Lemme 3.7 : On suppose que $\beta_{j+1} - \beta_j = \Delta\mu = \frac{1}{J}$, $-J \leq j \leq -1$.

On a :

$$(3.36) \qquad \prod_{j=-J+1}^{-1} \frac{\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}}}{2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - 1} \leq C$$

où C est une constante indépendante de $\Delta\mu$.

Démonstration : On pose

$$\lambda_j = \frac{\frac{3}{2} - 2\alpha_{j+\frac{1}{2}}}{2\alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}} \quad .$$

Pour le schéma IV.1, on a, d'après les relations (2.2), (2.55) et (3.32) :

$$\lambda_j \leq \frac{\frac{1}{2} + 2c\,\frac{\Delta\mu}{\sqrt{|\mu_j + \mu_{j+1}|}}}{\frac{1}{2} - 2c\,\frac{\Delta\mu}{\sqrt{|\mu_j + \mu_{j+1}|}}} = \frac{1 + \frac{4c}{\sqrt{J(1-2j)}}}{1 - \frac{4c}{\sqrt{J(1-2j)}}} = \lambda'_j$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité

$$\mathrm{Log}\,(1 + |x|) \leq |x| \quad ,$$

on a

$$\mathrm{Log}\,\lambda'_j \leq \frac{8c}{\sqrt{J(1-2j)}} \quad .$$

En sommant sur les indices j , $-J \leq j \leq -1$, il vient

$$\sum_{j=-J}^{-1} \mathrm{Log}\,\lambda_j \leq \sum_{j=-J}^{-1} \mathrm{Log}\,\lambda'_j \leq \text{cste}$$

On en déduit immédiatement le Lemme 3.7.

Pour le schéma IV.2, on a d'après les relations (2.2), (2.58) et (3.32) :

$$\lambda_j \leq \frac{\frac{1}{2} + 2c\,\Delta\mu\,|(\mu_j + \mu_{j+1})|}{\frac{1}{2} - 2c\,\Delta\mu\,|(\mu_j + \mu_{j+1})|} \leq \frac{1 + 8c\,\Delta\mu}{1 - 8c\,\Delta\mu} \quad .$$

On en déduit immédiatement la relation (3.36).

Lemme 3.8 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r = \frac{1}{I}$, $\beta_{j+1} - \beta_j = \Delta\mu = \frac{1}{J}$

La restriction des schémas IV.1 et IV.2 au domaine $\Omega^-_{0,0}$ est stable pour la

norme $\|\cdot\|^{-}_{\gamma,1,h}$, pour $\gamma \geq \frac{2}{3}$. Soit $u_h \in V_h$ satisfaisant la relation (2.43) pour $-J \leq j \leq -1$. On a les majorations ; pour $0 \leq \delta \leq 1$:

$$(3.37)\quad \max_{1\leq i\leq I-1}\left\{\sum_{j=-J}^{-1}\left(\omega|\mu|(1-\mu^2)^{-\delta}\right)_{j+\frac12} r_i^{\gamma} u^2_{i,j+\frac12}\right\} + \sum_{j=-J}^{-1}\left(\omega|\mu|(1-\mu^2)^{-\delta}\right)_{j+\frac12}\Delta r^{\gamma} u^2_{0,j+\frac12} +$$

$$+ \max_{-J+1\leq j\leq 0}\left\{\sum_{i=0}^{I-1}\left(w r^{\gamma-1}\right)_{i+\frac12}(1-\mu_j^2)^{1-\delta} u^2_{i+\frac12,j}\right\} + \left(\|u_h\|^{-}_{\gamma,\delta,h}\right)^2 \leq$$

$$\leq C\begin{cases}\Delta\mu^{\delta-1}\left(\|S\|^{-}_{\gamma,\delta,h}\right)^2 + \sum_{i=0}^{I-1}\left(w r^{\gamma-1}\right)_{i+\frac12} u^2_{i+\frac12,-J}\,, & \gamma\geq\frac23\,,\\ \Delta r^{2\gamma-\frac43}\left(\Delta\mu^{\delta-1}\left(\|S\|^{-}_{\gamma,\delta,h}\right)^2 + \sum_{i=0}^{I-1}\left(w r^{\gamma-1}\right)_{i+\frac12} u^2_{i+\frac12,-J}\right), & 0\leq\gamma<\frac23\end{cases}$$

où C est une constante >0 indépendante de Δr et $\Delta\mu$

Démonstration : En combinant les relations (2.43), (3.29) et (3.35), et en multipliant par $\left(a_{i+\frac12}\right)^{\frac{\gamma}{2}-1}\left(b_{j+\frac12}\right)^{-\delta}$, il vient :

$$(3.38)\quad \omega|\mu|\, b^{-\delta}\left(\frac{a^{\frac{\gamma}{2}}}{r_i^{\gamma}}\left(\tfrac32-2\theta\right) r_i^{\gamma} u_i^2 - \frac{a^{\frac{\gamma}{2}}}{r_{i+1}^{\gamma}}\left(2\theta-\tfrac12\right) r_{i+1}^{\gamma} u_{i+1}^2\right) +$$

$$+ w r a^{\frac{\gamma}{2}-1}\left(\frac{b^{1-\delta}}{\beta_{j+1}^{1-\delta}}\left(2\alpha-\tfrac12\right)\beta_{j+1}^{1-\delta} u_{j+1}^2 - \frac{b^{1-\delta}}{\beta_j^{1-\delta}}\left(\tfrac32-2\alpha\right)\beta_j^{1-\delta} u_j^2\right) +$$

$$+ w\omega r^2 a^{\frac{\gamma}{2}-1} b^{-\delta}\left(\sigma u^2_{i+\frac12,j+\frac12} - (S u)_{i+\frac12,j+\frac12}\right) \leq 0$$

où on a remplacé, pour la commodité de l'écriture :

$(\omega,\mu,b,\alpha,u_{i,\cdot})_{j+\frac12}$ par $(\omega,\mu,b,\alpha,u_i)$ et

$(w,r,a,\theta,u_{\cdot,j})_{i+\frac12}$ par (w,r,a,θ,u_j).

Pour traiter le 1er terme du membre de gauche de (3.38), on procède comme dans le Lemme 3.3 (on considérera séparément la relation (3.38) pour $1 \leq i \leq I-1$ et pour $i = 0$

On a, d'après les relations (2.52), (2.53) et (2.56) :

$$(3.39) \qquad \prod_{j=-J+1}^{0} \frac{\beta_j}{\beta_{j+1}} \leq c\, \Delta\mu^{-1} \quad .$$

En sommant l'inégalité (3.38) sur les indices i, $0 \leq i \leq I-1$, et j, $-J \leq j \leq -1$, et en utilisant le Lemme 3.3 et les inégalités (3.14), (3.15), (3.33) et (3.39), on obtient le Lemme 3.8.

Définition 3.2 : Soit v une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. Sa fonction V_h-interpolée est l'unique fonction $r_h v \in V_h$, telle que :

$$(3.40) \qquad (r_h v)_{i+\frac{1}{2},j} = \theta_{i+\frac{1}{2}}\, v(r_{i+1},\mu_j) + (1-\theta_{i+\frac{1}{2}})\, v(r_i,\mu_j) \;,$$

$$-J \leq j \leq +J \;,\quad 0 \leq i \leq I-1 \;,$$

$$(3.41) \qquad (r_h v)_{i,j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}}\, v(r_i,\mu_{j+1}) + (1-\alpha_{j+\frac{1}{2}})\, v(r_i,\mu_j) \;,$$

$$-J \leq j \leq J-1 \;,\quad 0 \leq i \leq I \quad .$$

En raisonnant comme dans [6] et dans le Lemme 3.4, on montre le résultat suivant :

Lemme 3.9 : Soit une fonction $v \in H^2(\Omega)$, on a :

$$(v - r_h v)(r_{i+\frac{1}{2}},\mu_{j+\frac{1}{2}}) \leq c\, h\, |v|_{2,2,K_{ij}} \;,\quad 0 \leq i \leq I-1,\ -J \leq j \leq J-1,$$

$$(v - r_h v)(r_{i+\frac{1}{2}},\mu_{j+1}) \leq c\, h\, |v|_{2,2,K_{ij}} \;,\quad 0 \leq i \leq I-1,\ -J \leq j \leq J-1,$$

$$(v - r_h v)(r_i,\mu_{j+\frac{1}{2}}) \leq c\, h\, |v|_{2,2,K_{ij}} \;,\quad 0 \leq i \leq I-1,\ -J \leq j \leq J-1 \;.$$

Lemme 3.10 : Soit une fonction $v \in H^3(\Omega)$, on a :

$$(3.42) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial r}(v - r_h v)(r_{i+\frac{1}{2}},\mu_{j+\frac{1}{2}})\right| \leq c\, h \left((r_i + r_{i+1})^{-1} |v|_{2,2,K_{ij}} + |v|_{3,2,K_{ij}}\right) \;,$$

$$(3.43) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial \mu}(v - r_h v)(r_{i+\frac{1}{2}},\mu_{j+\frac{1}{2}})\right| \leq c\, h \begin{cases} |\mu_j + \mu_{j+1}|^{-\frac{1}{2}} |v|_{2,2,K_{ij}} + |v|_{3,2,K_{ij}} \;, & \text{Schéma IV.1} \;, \\ \|v\|_{3,2,K_{ij}} \;, & \text{Schéma IV.2} \;. \end{cases}$$

pour $0 \le i \le I-1$, $-J \le j \le J-1$, où C est une constante > 0 indépendante de Δr et $\Delta\mu$, et $h = \max(\Delta r, \Delta\mu)$.

Démonstration : Soit $\hat{K} = [-1,+1]^2$ le carré de référence, et $F_{ij} \in (\mathbb{P}_1)^2$ la transformation qui envoie l'élément K_{ij} sur $\hat{K}$. On a :

$$(r_{i+\frac12}, \mu_{j+\frac12}) = F_{ij}(\varepsilon_{i+\frac12}, e_{j+\frac12}),$$

$$\varepsilon_{i+\frac12} = 2\theta_{i+\frac12} - 1 = \frac{1}{3}\frac{r_{i+1}-r_i}{r_{i+1}+r_i} \quad , \tag{3.44}$$

$$|e_{j+\frac12}| = |2\alpha_{j+\frac12} - 1| \le C \begin{cases} \Delta\mu\, |\mu_j + \mu_{j+1}|^{-\frac12} & \text{Schéma IV.1.} \\ \Delta\mu\, |\mu_j + \mu_{j+1}| & \text{Schéma IV.2.} \end{cases}$$

A la fonction v , on associe $\hat{v} = v \circ F_{ij}$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial r}(v - r_h v)(r_{i+\frac12}, \mu_{j+\frac12}) = \frac{2}{\Delta r}\frac{\partial}{\partial\xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})(\varepsilon_{i+\frac12}, e_{j+\frac12}) \quad , \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(v - r_h v)(r_{i+\frac12}, \mu_{j+\frac12}) = \frac{2}{\Delta\mu}\frac{\partial}{\partial\eta}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})(\varepsilon_{i+\frac12}, e_{j+\frac12}) \quad ,$$

où $\hat{r}\hat{v}$ est l'unique polynôme de $\mathbb{P}_1$ tel que :

$$\hat{r}\hat{v}(\varepsilon_{i+\frac12}, \pm 1) = \theta_{i+\frac12}\,\hat{v}(1, \pm 1) + (1 - \theta_{i+\frac12})\,\hat{v}(-1, \pm 1) \quad ,$$

$$\hat{r}\hat{v}(\pm 1, e_{j+\frac12}) = \alpha_{j+\frac12}\,\hat{v}(\pm 1, 1) + (1 - \alpha_{j+\frac12})\,\hat{v}(\pm 1, -1) \, .$$

L'application linéaire $\hat{v} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial\xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})(\varepsilon_{i+\frac12}, e_{j+\frac12})$ est continue de $H^3(\hat{K})$ dans $\mathbb{R}$, et on a, pour $\hat{v} \in \mathbb{P}_2$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})(\varepsilon_{i+\frac12}, e_{j+\frac12})\right| \le C\,\varepsilon_{i+\frac12}\,\|\hat{v}\|_{2,2,\hat{K}} \quad ,$$

en effet, si $\hat{v} = \xi\eta$, alors $\hat{r}\hat{v} = (2\theta_{i+\frac12} - 1)\eta + (2\alpha_{j+\frac12} - 1)\xi$, et $\frac{\partial}{\partial\xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})(\varepsilon_{i+\frac12}, e_{j+\frac12}) = 0$; si $\hat{v} = \eta^2$, alors $\hat{r}\hat{v}$ ne dépend que de η et $\frac{\partial}{\partial\xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v}) = 0$.

Si $\hat{v} = \xi^2$, $\hat{r}\hat{v} = 1$ et $\frac{\partial}{\partial\xi}(\hat{v} - \hat{r}\hat{v})(\varepsilon_{i+\frac12}, e_{j+\frac12}) = 2\,\varepsilon_{i+\frac12}$

En appliquant le Lemme 0.4, il vient :

(3.46) $$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}(\hat{v}-\hat{\pi}\hat{v})\,(\xi_{i+\frac12},e_{j+\frac12})\right| \le c\left(\varepsilon_{i+\frac12}|\hat{v}|_{2,2,\hat{R}}+(1+\varepsilon_{i+\frac12})|\hat{v}|_{3,2,\hat{R}}\right).$$

En combinant les relations (3.44), (3.45), et (3.46) avec le Lemme 0.8, on obtient la majoration (3.42).

La majoration (3.43) se démontre de la même façon.

En utilisant les Lemmes 3.5 à 3.10 et le Théorème 3.1, on montre les majorations d'erreur suivantes :

Théorème 3.2 : Soit $u \in H^3(\Omega)\cap W^{2,\infty}(\Omega)$ la solution du problème (1.1), (1.2). On suppose que $r_{i+1}-r_i = \Delta r = \frac{1}{I}$, $0 \le i \le I-1$, $\mu_{j+1}-\mu_j = \Delta\mu = \frac{1}{J}$, $-J \le j \le J-1$, et que $c \le \frac{\Delta r}{\Delta\mu} \le C$.

On a alors :

(3.47) $$\max_{1\le i\le I-1}\left\{\sum_{j=-J}^{-1}\left(\omega|\mu|(1-\mu^2)^{-\delta}\right)_{j+\frac12} r_i^{\gamma}\left(u_{i,j+\frac12}-u(r_i,\mu_{j+\frac12})\right)^2\right\}+$$

$$+\max_{-J+1\le j\le 0}\left\{\sum_{i=0}^{I-1}\left(w r^{\gamma-1}\right)_{i+\frac12}(1-\mu_j^2)^{-\delta}\left(u_{i+\frac12,j}-u(r_{i+\frac12},\mu_j)\right)^2\right\}+$$

$$+\sum_{j=-J}^{-1}\left(\omega|\mu|(1-\mu^2)^{-\delta}\right)_{j+\frac12}\Delta r^{\gamma}\left(u_{0,j+\frac12}-u(0,\mu_{j+\frac12})\right)^2+\left(\|u-u_h\|^-_{\gamma,\delta,h}\right)^2 \le$$

$$\le c\,E_1^{(i)}(\gamma,\delta,h)\left(|u|^2_{2,\omega,\Omega}+\|u\|^2_{3,2,\Omega}\right),$$

où les valeurs de $E_1^{(i)}(\gamma,\delta,h)$ sont données dans le tableau 3.1 et où $h=\max(\Delta r,\Delta\mu)$.

Tableau 3.1

Valeurs de $E_1^{(2)}(\gamma,\delta,h)$ - Schéma IV.2

	$0<\gamma<\frac23$	$\frac23\le\gamma<1$	$\gamma=1$	$1<\gamma\le 2$
$0\le\delta<1$	$h^{\frac23+3\gamma+\delta}$	$h^{2+\gamma+\delta}$	$h^{3+\delta}\lvert\mathrm{Log}\,h\rvert$	$h^{3+\delta}$
$\delta=1$	$h^{\frac53+3\gamma}\lvert\mathrm{Log}\,h\rvert$	$h^{3+\gamma}\lvert\mathrm{Log}\,h\rvert$	$h^4(\mathrm{Log}\,h)^2$	$h^4\lvert\mathrm{Log}\,h\rvert$

$E_1^{(1)}(\gamma,1,h)=E_1^{(2)}(\gamma,1,h)$, $E_1^{(1)}(\gamma,\delta,h)=|\mathrm{Log}\,h|\,E_1^{(2)}(\gamma,\delta,h)$, $0\le\delta<1$.

Démonstration : On procède de la même façon que dans le Théorème 3.1. En utilisant les relations (2.22) et (2.30), l'égalité (2.43) peut s'écrire, pour $0 \leq i \leq I-1$, $-J \leq j \leq J-1$

$$(3.48)\quad \left(\mu \frac{\partial}{\partial r} u_h + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial u_h}{\partial \mu} + \sigma u_h - S\right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = 0 \ .$$

Si dans la relation (3.37) on remplace u_h par $u_h - r_h u$, le terme S est alors remplacé par S' , avec

$$S' = \left(\mu \frac{\partial}{\partial r}(u - r_h u) + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}(u - r_h u) + \sigma(u - r_h u)\right)(r, \mu) \ .$$

En utilisant les Lemmes 3.9 et 3.10, on a pour le schéma IV.2 :

$$(3.49)\quad |S'_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}| \leq c\, h \left((r_i + r_{i+1})^{-1} \left(1 + (1 - \mu^2_{j+\frac{1}{2}})\right) |u|_{2,2,K_{ij}} + |u|_{3,2,K_{ij}} \right) .$$

En majorant $w_{i+\frac{1}{2}}$ par $c\,\Delta r$, $\omega_{j+\frac{1}{2}}$ par $c\,\Delta\mu$, $|u|^2_{2,2,K_{ij}}$ par $h^2 |u|^2_{3,\infty,K_{ij}}$, on obtient :

$$\left(\|S'\|^-_{\gamma,s,h}\right)^2 \leq c\, h^4 |u|^2_{2,\infty,\Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{I} r_i^{\gamma-2} \Delta r \right) \left(\sum_{j=-J}^{-1} (1 - \mu^2_{j+1})^{-s} \Delta\mu \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{I} r_i^{\gamma-2} \Delta r \right) \left(\sum_{j=-J}^{-1} \left(1 - \mu^2_{j+\frac{1}{2}}\right)^{2-s} \Delta\mu \right) \right\} + h^4 |u|^2_{3,2,\Omega} \ .$$

On en déduit que

$$(3.50)\quad \left(\|S'\|^-_{\gamma,s,h}\right)^2 \leq c \left(E_2^{(2)}(\gamma, s, h)\, |u|^2_{2,\infty,\Omega} + h^4 |u|^2_{3,2,\Omega} \right) ,$$

où les valeurs de $E_2^{(2)}(\gamma, s, h)$ sont données dans le tableau 3.2.
Dans le cas du schéma IV.1, il faut remplacer $E_2^{(2)}(\gamma, s, h)$ par $E_2^{(1)}(\gamma, s, h) = E_2^{(2)}(\gamma, 1, h)$.

Tableau 3.2

Valeurs de $E_2^{(2)}(\gamma, s, h)$ (Schéma IV.2)

	$0 \leq \gamma < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \leq \gamma < 1$	$\gamma = 1$	$1 < \gamma \leq 2$
$0 \leq s < 1$	$h^{3+\gamma}$	$h^{3+\gamma}$	$h^4 \lvert \mathrm{Log}\, h \rvert$	h^4
$s = 1$	$h^{3+\gamma} \lvert \mathrm{Log}\, h \rvert$	$h^{3+\gamma} \lvert \mathrm{Log}\, h \rvert$	$h^4 (\mathrm{Log}\, h)^2$	$h^4 \lvert \mathrm{Log}\, h \rvert$

En combinant les inégalités (3.19), (3.37) et (3.50), on obtient la majoration (3.47) dans laquelle $u(r,\mu)$ est remplacé par $r_h u$ dans le membre de gauche. L'inégalité (3.47) est alors une conséquence du résultat suivant :

Lemme 3.11 : On suppose que les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites. On a alors :

$$(3.51)\quad \sum_{j=-J}^{J-1} \left(\omega|\mu|(1-\mu^2)^{-\delta}\right)_{j+\frac12} \left((u-r_h u)(r_i,\mu_{j+\frac12})\right)^2 \le c \begin{cases} h^4 |u|^2_{2,\infty,\Omega} & \text{si } 0\le\delta<1 \\ h^4 |\mathrm{Log}\, h|\, |u|^2_{2,\infty,\Omega} & \text{si } \delta=1 \end{cases},$$

pour $0 \le i \le I-1$,

$$(3.52)\quad \sum_{i=0}^{I-1} \left(w r^{\gamma-1}\right)_{i+\frac12} \left((u-r_h u)(r_{i+\frac12},\mu_j)\right)^2 \le c h^4 |u|^2_{2,\infty,\Omega} \quad \text{si } \gamma>0,$$

pour $-J+1 \le j \le J$

$$(3.53)\quad \|u-r_h u\|_{\gamma,\delta,h} \le c \begin{cases} h^2 |u|_{2,\infty,\Omega} & \text{si } 0\le\delta<1 \\ h^2 |\mathrm{Log}\, h|\, |u|_{2,\infty,\Omega} & \text{si } \delta=1 \end{cases}.$$

Démonstration : En utilisant les résultats d'approximation de [5], [6], on a :

$$\left((u-r_h u)(r_i,\mu_{j+\frac12})\right)^2 \le c h^4 |u|^2_{2,\infty,K_{ij}} \quad , \ 0\le i\le I-1, -J\le j\le J-1.$$

On a donc

$$\sum_{j=-J}^{J-1} \left(\omega|\mu|(1-\mu^2)^{-\delta}\right)_{j+\frac12} \left((u-r_h u)(r_i,\mu_{j+\frac12})\right)^2 \le c h^4 |u|^2_{2,\infty,\Omega} \sum_{j=-J}^{J-1} \left(\omega|\mu|(1-\mu^2)^{-\delta}\right)_{j+\frac12}.$$

On en déduit la majoration (3.51). En procédant de la même façon, on obtient les inégalités (3.52) et (3.53).

Corollaire 3.2 : On a les majorations d'erreur :

$$(3.54)\quad \|u-u_h\|^-_{2,1,h} \le c\, h^2 |\mathrm{Log}\, h|^{1/2} \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega}\right),$$

$$(3.55)\quad \|u-u_h\|^-_{0,1,h} \le c\, h^{3/2} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2} \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega}\right),$$

$$(3.56)\quad \left(\sum_{j=-J}^{-1} \omega_{j+\frac12} \left|\mu_{j+\frac12}\right| \left| u_{0,j+\frac12} - u(0,\mu_{j+\frac12}) \right|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq c\, h^{3/2} \left|\mathrm{Log}\, h\right| \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega} \right) . \quad \blacksquare$$

On considère maintenant les relations (2.43) pour $0 \leq i \leq I-1$, $0 \leq j \leq J-1$. L'expression $Y_{i+\frac12,j+\frac12}$ peut s'écrire :

$$(3.57)\quad Y_{i+\frac12,j+\frac12} = \left\{ \left(\omega\, \mu \left(\left(r^2_{i+1} u_{i+1,\cdot} - r^2_i u_{i,\cdot} \right) - r_{i+\frac12} w_{i+\frac12} u_{i+\frac12,\cdot} \right) \right)_{j+\frac12} + \right.$$

$$\left. + \left(w\, r \left(\left(\beta_{j+1} u_{\cdot,j+1} - \beta_j u_{\cdot,j} \right) + \mu_{j+\frac12} \omega_{j+\frac12} u_{\cdot,j+\frac12} \right) \right)_{i+\frac12} \right\} u_{i+\frac12,j+\frac12} .$$

Lemme 3.12 : Pour tout couple de scalaires (v_i, v_{i+1}), $0 \leq i \leq I-1$, on a :

$$(3.58)\quad 2 \left(\left(r^2_{i+1} v_{i+1} - r^2_i v_i \right) - (r w v)_{i+\frac12} \right) v_{i+\frac12} \geq \left(r^2_{i+1} - 2 d_{i+\frac12} \right) v^2_{i+1} - \left(r^2_i + 2 d_{i+\frac12} \right) v^2_i ,$$

où $\quad v_{i+\frac12} = \theta_{i+\frac12} v_{i+1} + (1-\theta_{i+\frac12}) v_i$,

$$(3.59)\quad d_{i+\frac12} = -\theta^2_{i+\frac12} r^2_i + (1-\theta_{i+\frac12})^2 r^2_{i+1} .$$

Démonstration : En remplaçant $v_{i+\frac12}$ par sa valeur, on a :

$$X_{i+\frac12} = 2 \left(r^2_{i+1} v_{i+1} - r^2_i v_i - (r w v)_{i+\frac12} \right) v_{i+\frac12} ,$$

$$X_{i+\frac12} = r^2_{i+1} v^2_{i+1} - r^2_i v^2_i - d_{i+\frac12} (v_{i+1} - v_i)^2 .$$

On a :

$$d_{i+\frac12} = \frac13 (r_{i+1} - r_i) \left((1-\theta_{i+\frac12}) r_{i+1} + \theta_{i+\frac12} r_i \right) > 0 .$$

On en déduit l'inégalité (3.58).

Lemme 3.13 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r = \frac{1}{I}$, $0 \leq i \leq I-1$. On a alors :

$$(3.60)\quad \prod_{i=1}^{I-1} \frac{r^2_i + 2 d_{i+\frac12}}{r^2_{i+1} - 2 d_{i+\frac12}} \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^\gamma \leq \begin{cases} c & , \text{ si } 0 \leq \gamma \leq \frac23 \\ c\, \Delta r^{\gamma - \frac23} & , \text{ si } \frac23 < \gamma \end{cases}$$

Démonstration : On a :

$$(3.61)\qquad r_i^2 + 2\,d_{i+\frac{1}{2}} = \frac{7r_i^3 + 3r_i^2 r_{i+1} + 6r_i r_{i+1}^2 + 2r_{i+1}^3}{9(r_i + r_{i+1})}$$

$$(3.62)\qquad r_{i+1}^2 - 2\,d_{i+\frac{1}{2}} = \frac{7r_{i+1}^3 + 3r_{i+1}^2 r_i + 6r_i^2 r_{i+1} + 2r_i^3}{9(r_i + r_{i+1})}$$

En remplaçant r_i par $i\,\Delta r$, il vient :

$$\frac{r_i^2 + 2\,d_{i+\frac{1}{2}}}{r_{i+1}^2 - 2\,d_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{18i^3 + 21i^2 + 12i + 2}{18i^3 + 33i^2 + 24i + 7} = 1 - \frac{2}{3}\frac{1}{i} + O\left(\frac{1}{i^2}\right)$$

On en déduit que :

$$\frac{r_i^2 + 2\,d_{i+\frac{1}{2}}}{r_{i+1}^2 - 2\,d_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)^{\gamma} = 1 + \left(\gamma - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{i} + O\left(\frac{1}{i^2}\right) .$$

En raisonnant comme dans le Lemme 3.2 on en déduit la majoration (3.60).

Lemme 3.14 : On suppose que $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta\mu = \frac{1}{J}$. Pour tout couple de scalaires (v_j, v_{j+1}) , $0 \le j \le J-1$ on a :

$$(3.63)\qquad 2\left(\beta_{j+1} v_{j+1} - \beta_j v_j - (\mu\omega v)_{j+\frac{1}{2}}\right) v_{j+\frac{1}{2}} \ge \beta_{j+1} v_{j+1}^2 - \beta_j v_j^2 ,$$

où $\quad v_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} v_{j+1} + (1 - \alpha_{j+\frac{1}{2}}) v_j$.

Démonstration : En remplaçant $v_{j+\frac{1}{2}}$ par sa valeur et en utilisant la relation (2.21), on a :

$$X_{j+\frac{1}{2}} = 2\left(\beta_{j+1} v_{j+1} - \beta_j v_j - (\mu\omega v)_{j+\frac{1}{2}}\right) v_{j+\frac{1}{2}} ,$$

$$X_{j+\frac{1}{2}} = \beta_{j+1} v_{j+1}^2 - \beta_j v_j^2 + \left(\beta_j \alpha_{j+\frac{1}{2}}^2 - \beta_{j+1}(1-\alpha_{j+\frac{1}{2}})^2\right)(v_{j+1} - v_j)^2 .$$

D'après les relations (3.32), on a :

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \qquad 0 \le j \le J-1 .$$

D'après les relations (2.53) et (2.56), on a pour les schémas IV.1 et IV.2

$$\beta_{j+1} < \beta_j \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq j \leq J-1$$

On en déduit la majoration (3.63).

En utilisant les Lemmes 3.12 et 3.14, on a donc :

$$(3.64)\quad 2\,\gamma_{i+\frac12,j+\frac12} \geq \omega_{j+\frac12}\mu_{j+\frac12}\left(\left(r_{i+1}^2 - 2d_{i+\frac12}\right)u_{i+1,j+\frac12}^2 - \left(r_i^2 + 2d_{i+\frac12}\right)u_{i,j+\frac12}^2\right) +$$

$$+ w_{i+\frac12} r_{i+\frac12}\left(\beta_{j+1} v_{i+\frac12,j+1}^2 - \beta_j^2 v_{i+\frac12,j}\right) .$$

Lemme 3.15 : On suppose que $r_{i+1} - r_i = \Delta r = \frac{1}{I}$, $\mu_{j+1} - \mu_j = \Delta\mu = \frac{1}{J}$ La restriction des schémas IV.1 et IV.2 au domaine $\Omega^+_{R,1}$ est stable pour la norme $\|\cdot\|^+_{\gamma,0,R}$, pour $\gamma \leq \frac23$. Soit $u_R \in V_R$ satisfaisant la relation (2.43) pour $0 \leq j \leq J-1$. On a les majorations :

$$(3.65)\quad \max_{1\leq i\leq I} \sum_{j=0}^{J-1} \omega_{j+\frac12}\mu_{j+\frac12} r_i^\gamma u_{i,j+\frac12}^2 +$$

$$\max_{1\leq j\leq J-1} \sum_{i=0}^{I-1} w_{i+\frac12} r_{i+\frac12}^{\gamma-1} \beta_j u_{i+\frac12,j}^2 + \left(\|u_R\|^+_{\gamma,0,R}\right)^2 \leq$$

$$\leq C\,\Delta r^{\inf(0,\frac23-\gamma)}\left\{\left(\|S\|^+_{\gamma,0,R}\right)^2 + \sum_{i=0}^{I-1} w_{i+\frac12} r_{i+\frac12}^{\gamma-1}\left(u_{i+\frac12,0}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{J-1} (\omega\mu)_{j+\frac12}\,\Delta r^\gamma \left(u_{0,j+\frac12}\right)^2\right\} ,$$

où C est une constante >0 indépendante de Δr et $\Delta\mu$

Démonstration : On multiplie la relation (2.43) par $\left(r_{i+\frac12}\right)^{\gamma-2}$. Il existe une constante C indépendante de Δr telle que :

$$(3.66)\qquad C \leq \frac{r_{i+\frac12}}{r_i} \quad , \quad 1 \leq i \leq I-1 ,$$

$$(3.67)\qquad C \leq \frac{r_{i+1}}{r_{i+\frac12}} \quad , \quad 0 \leq i \leq I-1 .$$

En combinant les relations (2.43), (3.57), (3.61), (3.62), (3.64), (3.66) et (3.67), il vient :

$$(3.68)\quad \left\{\omega\mu\left(\frac{r_{i+1}^2-2d}{r_{i+\frac12}^{2-\gamma}\,r_{i+1}^{\gamma}}\,r_{i+1}^{\gamma}\,(u_{i+1,\bullet})^2-\frac{r_i^2+2d}{r_{i+\frac12}^{2-\gamma}\,r_i^{\gamma}}\,r_i^{\gamma}\,(u_{i,\bullet})^2\right)\right\}_{j+\frac12}+$$

$$+\left\{w\,r^{\gamma-1}\left(\beta_{j+1}(u_{\bullet,j+1})^2-\beta_j(u_{\bullet,j})^2\right)\right\}_{i+\frac12}+$$

$$+\omega_{j+\frac12}\,(wr^{\gamma})_{i+\frac12}\left(\tau\,u^2_{i+\frac12,j+\frac12}-(Su)_{i+\frac12,j+\frac12}\right)\le 0\,,$$

où on a remplacé pour la commodité de l'écriture

$$\left(\omega_{j+\frac12},\mu_{j+\frac12},u_{i,j+\frac12}\right)\quad\text{par}\quad\left(\omega,\mu,u_{i,\bullet}\right)_{j+\frac12}\qquad\text{et}$$

$$\left(w_{i+\frac12},r_{i+\frac12},d_{i+\frac12},(u_{i+\frac12,j})\right)\ \text{par}\quad\left(w,r,d,(u_{\bullet,j})\right)_{i+\frac12}$$

Pour $i=0$, le premier terme T du membre de gauche de l'inégalité (3.68), s'écrit :

$$T=\left\{\omega\mu\left(\frac{r_1^2-2d}{r_{\frac12}^{2-\gamma}\,r_1^{\gamma}}\,r_1^{\gamma}\,(u_{1,\bullet})^2-\frac{2d}{r_{\frac12}^{2-\gamma}}\,(u_{0,\bullet})^2\right)\right\}_{j+\frac12}\,,$$

et on a :

$$(3.69)\quad T\ge c\left\{\omega\mu\left(r_1^{\gamma}\,(u_{1,\bullet})^2-(\Delta r)^{\gamma}(u_{0,\bullet})^2\right)\right\}_{j+\frac12}\,.$$

On somme l'inégalité (3.68) sur les indices $0\le i\le I-1$, $0\le j\le J-1$. le Lemme 3.13 et les inégalités (3.66) à (3.69) entraînent alors la majoration (3.65).

En utilisant les Lemmes 3.11 à 3.15 et le Théorème 3.2, on montre les majorations d'erreur suivantes :

Théorème 3.3 : Soit $u\in H^3(\Omega)\cap W^{2,\infty}(\Omega)$ la solution du problème (1.1), (1.2). On suppose que $r_{i+1}-r_i=\Delta r=\frac{1}{I}$, $0\le i\le I-1$, $\mu_{j+1}-\mu_j=\Delta\mu=\frac{1}{J}$, $-J\le j\le J-1$ et que $c\le\frac{\Delta r}{\Delta\mu}\le C$, pour deux constantes c et $C>0$ indépendantes de Δr et $\Delta\mu$. On a alors :

$$(3.70)\quad \max_{1\le i\le I} \sum_{j=0}^{J-1} w_{j+\frac12}\,\mu_{j+\frac12}\, r_i^{\gamma} \left(u_{i,j+\frac12} - u(r_i,\mu_{j+\frac12})\right)^2 +$$

$$\max_{1\le j\le J-1} \sum_{i=0}^{I-1} w_{i+\frac12}\, r_{i+\frac12}^{\gamma-1}\, \beta_j \left(u_{i+\frac12,j} - u(r_{i+\frac12},\mu_j)\right)^2 + \left(\|u-u_R\|^{+}_{\gamma,0,h}\right)^2 \le$$

$$\le C\, E_3(\gamma,0,h)\left(|u|^2_{2,\infty,\Omega} + \|u\|^2_{3,2,\Omega}\right) ,$$

où les valeurs de $E_3(\gamma,0,h)$ sont données dans le Tableau 3.3 et où $h = \max(\Delta r, \Delta\mu)$

Tableau 3.3

Valeur de $E_3(\gamma,0,h)$

	$0\le\gamma<\frac23$	$\gamma=\frac23$	$\frac23<\gamma<1$	$\gamma=1$	$1<\gamma\le 2$
$E_3(0,\gamma,h)$	$h^{5/3+3\gamma}\lvert\log h\rvert$	$h^{11/3}\lvert\log h\rvert$	$h^{11/3}\lvert\log h\rvert$	$h^{11/3}(\log h)^2$	$h^{11/3}\lvert\log h\rvert$

Démonstration : On procède de la même façon que dans le Théorème (3.1). L'égalité (2.43) peut s'écrire comme en (3.48) :

$$(3.71)\quad \left(\mu\frac{\partial}{\partial r}u_h + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial u_h}{\partial\mu} + \sigma u_h - S\right)_{i+\frac12,j+\frac12} = 0$$

Si dans la relation (3.65), on remplace u_h par $u_h - r_R u$, le terme S est alors remplacé par S', avec :

$$(3.72)\quad S' = \left(\mu\frac{\partial}{\partial r}(u-r_R u) + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}(u-r_R u) + \sigma(u-r_R u)\right)(r,\mu) .$$

En utilisant les Lemmes 3.9 et 3.10, on montre comme au Théorème 3.2, que l'on a :

$$(3.73)\quad \left(\|S'\|^{+}_{\gamma,0,h}\right)^2 \le c\left(E_2^{(\iota)}(\gamma,0,h)\,|u|^2_{2,\infty,\Omega} + h^4\,|u|^2_{3,2,\Omega}\right) ,$$

où les valeurs de $E_2^{(\iota)}(\gamma,0,h)$ sont données dans le Tableau 3.2.

En combinant les inégalités (3.47), (3.56), (3.65) et (3.73), on obtient la majoration (3.70) dans laquelle u est remplacé par $r_h u$, dans le membre de gauche. L'inégalité (3.70) est alors une conséquence du Lemme 3.11.

Nous allons détailler cette dernière partie de la démonstration lorsque $\gamma = \frac{2}{3}$. On a alors, d'après l'inégalité (3.50) :

$$\left(\|S'\|^{+}_{\frac{2}{3},0,h} \right)^2 \leq c \left(h^{11/3} |\mathrm{Log}\, h|\, |u|^2_{2,\infty,\Omega} + h^4 |u|^2_{3,2,\Omega} \right) .$$

D'après le Théorème 3.2, appliqué pour $\gamma = \frac{2}{3}$ et $s = 1$, on a :

$$\sum_{i=0}^{I-1} w_{i+\frac{1}{2}} \left(r_{i+\frac{1}{2}} \right)^{-1/3} \left(u_{i+\frac{1}{2},0} - u(r_{i+\frac{1}{2}}, 0) \right)^2 \leq$$

$$\leq c \left(h^{11/3} |\mathrm{Log}\, h|\, |u|^2_{2,\infty,\Omega} + h^4 |u|^2_{3,2,\Omega} \right) .$$

Le Corollaire 3.2, inégalité (3.56), entraîne que :

$$\Delta z^{2/3} \sum_{j=0}^{J-1} (\omega\mu)_{j+\frac{1}{2}} \left(u_{0,j+\frac{1}{2}} - u(0, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 \leq$$

$$\leq c\, h^3 |\mathrm{Log}\, h| \left(|u|^2_{2,\infty,\Omega} + \|u\|^2_{3,2,\Omega} \right) .$$

Ces trois dernières inégalités et les Lemmes 3.11 et 3.15 entraînent la majoration (3.70) pour $\gamma = \frac{2}{3}$. On procède de la même façon pour les autres valeurs de γ .

Corollaire 3.3 : On a les majorations d'erreur :

$$\|u - u_h\|^{+}_{\frac{2}{3},0,h} \leq c\, h^{11/6} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2} \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega} \right) , \tag{3.74}$$

$$\|u - u_h\|^{+}_{2,0,h} \leq c\, h^{11/6} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2} \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega} \right) , \tag{3.75}$$

$$\|u - u_h\|^{+}_{0,0,h} \leq c\, h^{3/2} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2} \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega} \right) . \tag{3.76}$$

Des Théorèmes 3.2 et 3.3 et des Corollaires 3.2 et 3.3, on déduit les résultats de majorations d'erreur pour les schémas IV.1 et IV.2 :

Théorème 3.4 : On suppose que les hypothèses des Théorèmes 3.2 et 3.3 sont satisfaites. Soit $u \in H^3(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ la solution du problème (1.1), (1.2). On a alors :

$$\|u - u_h\|_{\frac{2}{3},0,h} \leq C\, h^{11/6} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2} \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega}\right), \tag{3.77}$$

$$\|u - u_h\|_{0,0,h} \leq C\, h^{3/2} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2} \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega}\right), \tag{3.78}$$

$$\|u - u_h\|_{2,0,h} \leq C\, h^{11/6} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2} \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega}\right), \tag{3.79}$$

$$\left(\sum_{j=-J}^{J-1} (\omega|\mu|)_{j+\frac{1}{2}} \left(u_{0,j+\frac{1}{2}} - u(0,\mu_{j+\frac{1}{2}})\right)^2\right)^{1/2} \leq C\, h^{3/2} |\mathrm{Log}\, h|^{1/2} \left(|u|_{2,\infty,\Omega} + \|u\|_{3,2,\Omega}\right). \tag{3.80}$$

où C est une constante > 0 indépendante de h

Remarque 3.2 : L'inégalité (3.78) nous donne une évaluation de l'erreur pour une norme sans poids. L'inégalité (3.20) nous fournit une évaluation de l'erreur pour $r = 0$, ce qui est très important en pratique.

Remarque 3.3 : La norme "naturelle" du problème semble être l'équivalent discret de la norme :

$$v \longrightarrow \|v\|_{\frac{2}{3},0} = \left(\int_0^R \int_{-1}^{+1} r^{2/3} v^2 \, dr\, d\mu\right)^{1/2} .$$

IV.4 - Résultats numériques

Dans ce paragraphe on utilise les schémas IV.1 et IV.2 décrits et étudiés aux paragraphes 2 et 3 pour résoudre quelques problèmes simples.

On considère d'abord la résolution de l'équation différentielle (2.32), (2.33) par le schéma (2.36).

On résout ensuite le problème (1.1), (1.2) en utilisant les schémas IV.1 et IV.2, pour différents seconds membres et différentes valeurs de Δr et $\Delta\mu$

Pour tous ces essais numériques, on donne les valeurs de l'erreur pour la norme L_2 avec poids r^2 .

Les essais numériques ont été effectués par MM. DONIOL et MORDANT.

Problème 1 : On considère l'équation différentielle

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \sigma \varphi = S \qquad \text{pour} \quad r \in]0, R[$$

$$\varphi(R) = \varphi_R$$

avec $\sigma = 1$, $R = 3$

On a testé numériquement le schéma (2.32) pour trois valeurs du second membre et de la condition aux limites

$$S_1 = 4 - r \;,\; \varphi_R^1 = 0 \quad ; \quad S_2 = \frac{4}{3}\exp\left(-\frac{r}{3}\right),\; \varphi_R^2 = \exp(-1) \quad ; \quad S_3 = \sin\frac{\pi r}{3} - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi r}{3},\; \varphi_R^3 = 0.$$

Dans les trois cas, on connaît la solution exacte :

$$\varphi^1 = 3 - r$$

$$\varphi^2 = \exp\left(-\frac{r}{3}\right)$$

$$\varphi^3 = \sin\left(\frac{\pi r}{3}\right)$$

On pose $\Delta r = \frac{R}{I}$. Des essais ont été effectués pour différentes valeurs de I . On définit l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée par :

$$\text{Erreur} = \left(\sum_{i=0}^{I-1} w_{i+\frac{1}{2}}\, r_{i+\frac{1}{2}}^2 \left(\varphi_{i+\frac{1}{2}} - \varphi(r_{i+\frac{1}{2}})\right)^2 \right)^{1/2} ,$$

où les notations utilisées sont celles du paragraphe 2.
Dans le tableau I on donne les valeurs de l'erreur pour les trois valeurs de S et pour 2 valeurs de I .

Tableau I

I \ Erreur	S^1, φ_R^1	S^2, φ_R^2	S^3, φ_R^3
15	$0.2919\ 10^{-12}$	$0.3657\ 10^{-3}$	$0.4859\ 10^{-3}$
30	$0.4805\ 10^{-12}$	$0.9132\ 10^{-4}$	$0.1204\ 10^{-3}$

Dans les 2ème et 3ème cas, on constate que l'erreur est en $O(\Delta r^2)$, ce qui est en accord avec le Théorème 3.1. Dans le premier cas, on a : $|\varphi|_{2,\infty(0R)} + |\varphi|_{3,2(0R)} = 0$. On devrait avoir une erreur nulle, ce qui correspond bien aux résultats trouvés.

Problème 2 : On veut résoudre le problème :

$$\mu \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) + r \frac{\partial}{\partial \mu}((1-\mu^2) u) + \sigma r^2 u = r^2 S \qquad \text{pour } (r,\mu) \in \Omega =]0,R[\times]-1,+1[$$

$$u(R,\mu) = u_R(\mu) \qquad \text{pour} \qquad \mu < 0$$

avec $\sigma = 1$, $R = 3$

On a testé numériquement les schémas IV.1 et IV.2 pour deux valeurs du second membre et de la condition aux limites

$$S^1 = \sin \frac{\pi r}{3} - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi r}{3} \quad , \quad u_R^1 = 0 \quad ,$$

$$S^2 = \frac{4}{3} \exp \frac{r\mu}{3} \quad , \quad u_R^2 = \exp(\mu)$$

Les solutions $u(r,\mu)$ correspondantes s'écrivent :

$$u^1(r,\mu) = \sin \frac{\pi r}{3} \quad ,$$

$$u^2(r,\mu) = \exp \frac{r\mu}{3} \quad .$$

On pose $\Delta r = \frac{R}{I}$, $\Delta \mu = \frac{1}{J}$. Le nombre de directions angulaires considérées est donc $M = 2J$

On définit l'erreur quadratique moyenne par :

$$EQM = \left(\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^{J-1} w_{i+\frac{1}{2}} \, \omega_{j+\frac{1}{2}} \, r_{i+\frac{1}{2}}^2 \left(u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - u(r_{i+\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 \right)^{1/2} .$$

On définit aussi des erreurs pour $r=0$ et $r=R$ par

$$EQ0 = \left(\sum_{j=-J}^{J-1} \omega_{j+\frac{1}{2}} \left(u_{0,j+\frac{1}{2}} - u(0,\mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 \right)^{1/2} ,$$

$$EQR = \left(\sum_{j=0}^{J-1} \omega_{j+\frac{1}{2}} \left(u_{I,j+\frac{1}{2}} - u(R,\mu_{j+\frac{1}{2}}) \right)^2 \right)^{1/2} .$$

Dans le tableau II (resp. III) on donne les valeurs des erreurs pour le cas où $u(r,\mu) = u^1(r,\mu)$ (resp. $u^2(r,\mu)$) et deux maillages en r et μ .

TABLEAU II

	E Q M		E Q R		E Q O	
	Schéma IV.1	Schéma IV.2	Schéma IV.1	Schéma IV.2	Schéma IV.1	Schéma IV.2
I = 15 M = 8	$0.4914\ 10^{-3}$	$0.4893\ 10^{-3}$	$0.3110\ 10^{-2}$	$0.3105\ 10^{-2}$	$0.1086\ 10^{-3}$	$0.1072\ 10^{-3}$
I = 30 M = 16	$0.1214\ 10^{-3}$	$0.1213\ 10^{-3}$	$0.9079\ 10^{-3}$	$0.9076\ 10^{-3}$	$0.2706\ 10^{-4}$	$0.2702\ 10^{-4}$

TABLEAU III

	E Q M		E Q R		E Q O	
	Schéma IV.1	Schéma IV.2	Schéma IV.1	Schéma IV.2	Schéma IV.1	Schéma IV.2
I = 15 M = 8	$0.2281\ 10^{-1}$	$0.3990\ 10^{-2}$	$0.4187\ 10^{-2}$	$0.8241\ 10^{-3}$	$0.9090\ 10^{-3}$	$0.9065\ 10^{-3}$
I = 30 M = 16	$0.6595\ 10^{-2}$	$0.9772\ 10^{-3}$	$0.1055\ 10^{-2}$	$0.2144\ 10^{-3}$	$0.2724\ 10^{-3}$	$0.2728\ 10^{-3}$

On constate que l'erreur quadratique moyenne E Q M est en $O(h^2)$, ce qui correspond à peu près aux résultats du Thoérème 3.3
L'erreur E Q O est aussi en $O(h^2)$, l'estimation donnée au Théorème 3.3 est donc, dans ce cas particulier, un peu pessimiste.

D'après les résultats du Tableau III, la discrétisation par rapport à la variable μ du schéma IV.2 conduit à des résultats plus précis que pour le schéma IV.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bell, G.I., Glasstone, S. : Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

[2] Bramble, J.H., Hilbert, S.H. : Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation, Numer. Math. 16 (1971), 362-369.

[3] Brezzi, F., Marini, L.D. : On the numerical solution of plate bending problems by hybrid methods (to appear in Pubblicazioni del Laboratorio di Analisi Numerica del C.N.R., Pavia).

[4] Ciarlet, P.G. : Conforming and nonconforming finite element methods for solving the plate problem, Conference on the Numerical Solution of Differential Equations, University of Dundee, July 03-06, 1973.

[5] Ciarlet, P.G. : cours Montréal 1975.

[6] Ciarlet, P.G., Raviart, P.A. : General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods, Arch. Rational Mech. Anal. 46 (1972), 177-199.

[7] Ciarlet, P.G., Raviart, P.A. : Interpolation theory over curved elements, with applications ot finite element methods, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1 (1972), 217-249.

[8] Ciarlet, P.G., Raviart, P.A. : The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods, The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (A.K. Aziz, Ed.), 409-475, Academic Press. New York, 1972.

[9] Ciarlet, P.G., Lesaint, P. : à paraître.

[10] Clément, Ph. : à paraître.

[11] Crouzeix, M. : Sur l'approximation des équations différentielles opérationnelles linéaires par des méthodes de Runge-Kutta. Thèse, Paris (1975).

[12] Dupont, T. : Galerkin methods for first order hyperbolics : an example. Siam J. Numer. Anal. Vol. 10, n° 5 (1973).

[13] Friedrichs, K.O. : Symmetric positive differential equations. Comm. on pure and appl. math. II (1958), 333-418.

[14] Irons B.M., Razzaque A. : Experience with the patch test for convergence of finite elements. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (A.K. Aziz, Ed.), 557-387, Academic Press. New York, 1972.

[15] Kaper, H.G., Leaf, G.K., Lindeman, A.J. : Application of finite element techniques for the numerical solution of the neutron transport and diffusion equations, Proc. Conf. on Transport Theory, 2nd Conf-710007, Los Alamos (1971).

[16] Kreiss, H.-O., Lundqvist, E. : On difference approximations with wrong boundary values. Math. of Computation Vol. 22, n° 101, 1968.

[17] Krylov, V.I. : Approximate Calculation of Integrals, Macmillan New York, London, 1962.

[18] Lascaux, P. : Approximation de systèmes d'équations aux dérivées partielles par des schémas aux différences. Thèse 1971, Paris.

[19] Lascaux, P., Lesaint, P. : Some nonconforming finite elements for the plate bending problem. R.A.I.R.O. Série Mathématiques, à paraître.

[20] Lascaux, P., Raviart, P.-A. : Stabilité et précision des schémas D.S.N. pour l'équation de transport en géométrie sphérique. Conférence on applications of Numerical Analysis. Dundee, Scotland (March 23-26, 1971). Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1971.

[21] Lathrop, K.D. : Spatial differencing of the transport equation : Positivity vs. accuracy. Journ. of Comp. Physics 4, 475-498 (1969).

[22] Lathrop, K.D., Carlson, B.G. : Numerical solution of the Boltzmann Transport equation. Journ. of Comp. Physics 2, 173-197 (1967).

[23] Lathrop, K.D., Carlson, B.G. : Transport Theory. The method of Discrete Ordinates. Computing Methods in Reactor Physics (Greenspan, H., Kelerb, C.N., Okrent, D., editors), 165-266, Gordon and Breach, 1968.

[24] Lesaint, P. : Finite element methods for symmetric hyperbolic equations. Numer. Math. 21, 244-255 (1973).

[25] Lax, P.D., Phillips, R.S. : Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 13, 427-455 (1960).

[26] Lesaint, P. : Finite element methods for the transport equation R.A.I.R.O. Série Mathématiques R-2, 67-94 (Août 1974).

[27] Lesaint, P. : Continuous and discontinuous finite element methods for solving the transport equation. Paper presented at the Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications, Brunel University April 7-10 (1975).

[28] Lesaint, P. : Méthodes d'éléments finis continues pour l'équation de transport en géométrie sphérique. A paraître.

[29] Lesaint, P. : On the convergence of Wilson's non conforming element for solving the elastic problem. To appear in Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.

[30] Lesaint, P., Gérin-Roze, J. : Isoparametric finite element methods for the neutron transport equation. To appear in Int. Jl. Num. Meth. Eng.

[31] Lesaint, P., Raviart, P.-A. : On a finite element metho for solving the neutron transport equation. Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations (C. de Boor, editor), 89-123, Academic Press. 1974.

[32] Lions, J.L. : Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Séminaire de Mathématiques supérieures (été 1962). Les Presses de l'Université de Montréal (1967).

[33] Lions, J.L., Magenès, E. : Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod (1968).

[34] Miller, W.F., Lewis, E.E., Rossow, C.E. : The application of phase-space finite elements to the two dimensional transport equation in x-y geometry. Nucl. Sci. and Eng. 52, 12 (1973).

[35] Necas, J. : Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques. Masson et Cie. Paris 1967.

[36] Nicolaides, R.A. : On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation. SIAM J. Numer. Anal. 9, 435-445.

[37] Ohnishi, T. : Application of finite element solution technique to neutron diffusion and transport equations. Proc. Conf. on New Developments in Reactor Mathematics and Applications, Conf. 71302, Idaho Falls (1971).

[38] Philipps, R.S., Sarason, L. : Singular symmetric positive first order differential operators. Journal of Mathematics and Mechanics 15, 235-271 (1966).

[39] Radau, R. : Etude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie. J. Math. Pures Appl. (3) Vol. 6, 283-336 (1880).

[40] Raviart, P.-A. : The use of numerical integration in finite element methods for solving parabolic equations. Topics in Numerical Analysis (J. Miller, editor) 233-264, Academic Press (1972).

[41] Raviart, P.-A. : Méthodes des Eléments Finis (cours à l'Université de Paris VI), Paris, 1972.

[42] Reed, W.H., Hill, T.R. : Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Proc. Amer. Nucl. Soc. To appear.

[43] Reed, W.H., Hill, T.R., Brinkley, F.W., Lathrop, K.D. : A two dimensional multigroup triangular mesh planar geometry explicit transport code. LA 5428 MS. Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California (1974).

[44] Reed, W.H., Lathrop, K.D. : Truncation error analysis of finite difference approximations to the transport equation. Nucl. Sci. and Eng., 41, 237-248 (1970).

[45] Smith, K.T. : Inequalities for formally positive integro-differential forms. Bull. A.M.S. 67, 368-370 (1961).

[46] Strang, G., Fix, G. : An analysis of finite element method, Prentice Hall, New-York, 1973

[47] Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method in Engineering Science Mac Grax-Hill, London (1971).

Manuscrit reçu le 23 décembre 1975